Decoupling.

Vyřešení problému otevřeného 80 let.

Vladimír Kučera

Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky ČVUT v Praze

Setkání kateder, Praha 2018

Decoupling, vyřešení problému otevřeného 80 let

Originální řešení dlouho otevřeného problému teorie lineárních systémů, známého anglicky jako „decoupling“, pomocí statické stavové zpětné vazby. Česky mluvíme o neinteraktivním řízení či eliminaci vnitřních vazeb systému.

Problém byl zkoumán již roku 1934, rigorózně formulován roku 1964
a řešení nejjednoduššího možného případu
systémů se stejným počtem vstupů a výstupů pochází z roku 1967.
Vyřešeno několik zvláštních případů,
obecný problém zůstal přes veškerou snahu nevyřešen do roku 2017.

Úvod

Cílem neinteraktivního řízení je kompenzovat daný systém tak, aby jeden každý výstup systému byl ovlivňován pouze jedním vstupem a nezávisel na ostatních vstupech.

Vnitřní vazby lze vždy eliminovat dynamickou stavovou zpětnou vazbou, která však zvyšuje řád systému.
Statická stavová zpětná vazba řád systému nezvyšuje, může využít jen vnitřní dynamiku systému, a proto je řešení obtížné.

Úvod

Předložené řešení nepožaduje žádné omezující předpoklady ani na systém, ani na zpětnou vazbu.
Existence řešení je podmíněna výhradně invarianty systému vzhledem k povoleným transformacím (jedině takové podmínky mají smysl).

Výsledný systém má diagonální přenos;
rozpadá se na podsystémy s jedním vstupem a výstupem, které se navzájem neovlivňují.
Taková vlastnost zjednodušuje další analýzu systému a syntézu řízení.

Odkaz na původní příspěvek

Přednáška je založena na publikaci

IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 62, NO. 12, pp. 6250-6265, DECEMBER 2017

Diagonal Decoupling of Linear Systems by Static-State Feedback

Vladimír Kučera, *Life Fellow, IEEE*

Historie

První výzkumy Vozněsenskij (1934, 1938),
Boksenbom, Hood (1950), Kavanagh (1957), Strejc (1960)
se týkaly neinteraktivního řízení složitých motorů a turbín v elektrárnách.

Nebyl řešen problém vnitřní struktury,
ani fyzikální realizovatelnosti a stability systému.
Problém potenciální nestability vyvolané skrytým krácením nul a pólů
nebyl v té době ještě plně pochopen.

Historie

Hlubší pohled poskytla metoda stavového prostoru.
Rigorózní formulace problému Morgan (1964),
řešení pro systémy se čtvercovým nesingulárním přenosem
prezentovali Falb, Wolovich (1967).

Morse, Wonham (1971) zkoumali systémy zprava invertovatelné.
Vyřešili případ dynamické stavové zpětné vazby,
případ statické stavové zpětné vazby jen za omezujících předpokladů.

Historie

Oživení přenosových metod přineslo nové výsledky.

Descusse, Dion (1982) ukázali, že neinteraktivní řízení
závisí na struktuře nuly systému v bodu $s = \infty$
(obdoba struktury násobných vlastních čísel v Jordanově tvaru matice).
Loiseau (1988) nalezl podmínky, za kterých lze systému přiřadit
předepsanou strukturu nuly v nekonečnu pomocí stavové zpětné vazby.

Na základě jeho výsledku Descusse, Lafay, Malabre (1988)
objevili nutné podmínky řešení obecné úlohy neinteraktivního řízení.

Historie

Zagalak, Lafay, Herrera-Hernández (1993)
nalezli nutné a postačující podmínky pro řešení úlohy neinteraktivního řízení, ale podmínky byly implicitní a netestovatelné.

Castañeda-Toledo, Ruiz-León (2012) nalezli řešení problému pro jednu předem zadanou strukturu nuly systému v nekonečnu a Zagalak, Kučera (2017) prozkoumali všechny dosažitelné struktury v systému, který již je neinteraktivní.

Podmínky řešitelnosti problému v plné obecnosti zůstávají nadále neznámé.

Formulace úlohy

Lineární systém (*A*, *B*, *C*, *D*) je popsán rovnicemi

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

dimenze vektorů stavu *x*, vstupu *u* a výstupu *y* jsou *n*, *m* a *p* a přenos systému

$$T(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

je matice ryzích racionálních funkcí rozměru *p*×*m*.

Formulace úlohy

Cílem je stanovit seznam *p* nezáporných celých čísel $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)$ a zpětnovazební zákon řízení (*F*, *G*) ve tvaru

$$u = Fx + Gv,$$

kde *v* je externí vstup dimenze *p*, tak aby přenos výsledného systému

$$T_{F,G}(s) := (C + DF)(sI_n - A - BF)^{-1}BG + DG$$

byl diagonální, až na permutační matici *Π*,

$$\Pi T_{F,G}(s) = \mathrm{diag}\,(s^{-r_1}, s^{-r_2}, \dots, s^{-r_p}).$$

Řešení úlohy

Neinteraktivní řízení je řešitelné pouze pro systémy,
jejichž přenosová matice je zprava invertovatelná, tedy rank $T(s) = p \leq m$.
Jinak výsledná diagonální matice $T_{F,G}(s)$ nemůže mít plnou hodnost p.

Speciální výběr požadované diagonální přenosové matice $T_{F,G}(s)$,
která má všechny póly v nule, není vůbec omezující.
Póly můžeme libovolně změnit při zachování neinteraktivnosti.

Řešení není jediné, lze dosáhnout různých struktur $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)$
nuly v nekonečnu a každou z nich zajistit mnoha různými zákony řízení (F, G).

Řešení úlohy

K řešení je třeba několika kroků.

- **Transformace systému do standardního tvaru**
- **Výběr tří seznamů nezáporných celých čísel**
- **Splnění podmínek pro existenci řešení**
- **Výpočet sériového kompenzátoru**
- **Zpětnovazební realizace kompenzátoru**
- **Zpětná transformace systému**

Transformace systému do standardního tvaru

Použitím vratných transformací dovolených při řešení úlohy

- **regulární stavová zpětná vazba (zachovává počet nezávislých vstupů)**
- **změna báze v prostoru stavových a vstupních proměnných**
- **permutace výstupních proměnných**

převedeme systém do standardního tvaru,
který ukazuje invarianty vůči povoleným transformacím
a vykazuje maximální neinteraktivnost dosažitelnou regulární zpětnou vazbou.
Dále už je třeba použít (nevratnou) neregulární stavovou zpětnou vazbu.

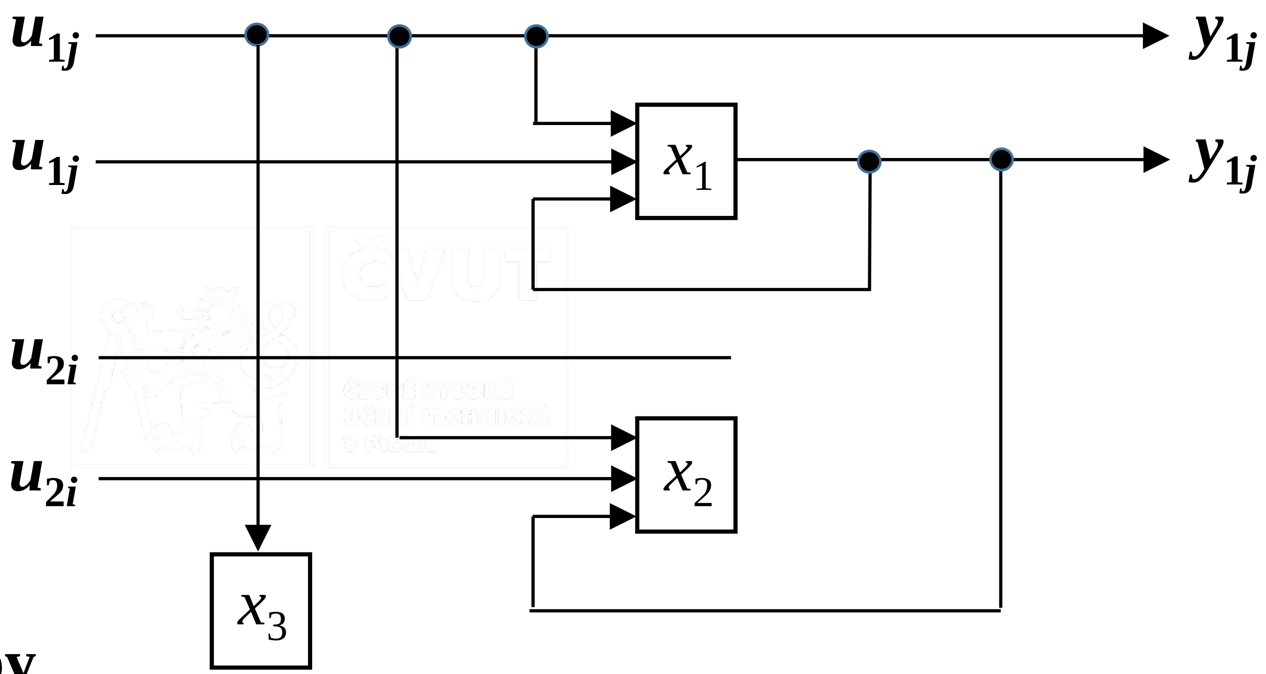
Standardní tvar

$j = 1,\ldots,\alpha_1$

$j = \alpha_1 + 1,\ldots,p$

$i = 1,\ldots,\alpha_2$

$i = \alpha_2 + 1,\ldots,m - p$



Jediné zbývající vazby jsou injekce výstupu do stavu.

Standardní tvar

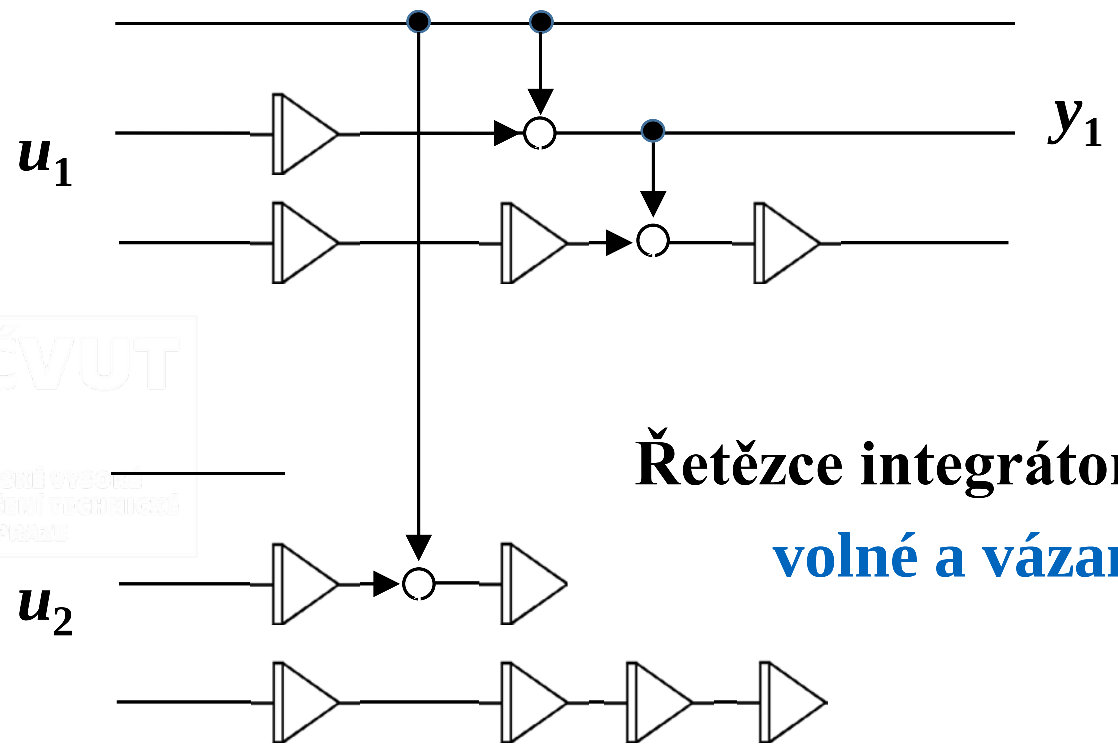
Detail podsystému 1

$\rho := (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)$

jsou indexy řiditelnosti

rovné indexům pozorovatelnosti

rovné řádům nuly v nekonečnu



Řetězce integrátorů

volné a vázané

Detail podsystému 2

$\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-p})$

je seznam indexů řiditelnosti druhého podsystému

Standardní tvar

Přenosová matice má dolní trojúhelníkový tvar a její inverze je polynomiální matice, zvaná interaktor

$$T_{dsf}(s) = \begin{bmatrix} s^{-\rho_1} & & \\ & \ddots & \\ t_{ij}(s) & & s^{-\rho_p} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = T_{dsf}^{-1}(s) := \begin{bmatrix} s^{\rho_1} & & \\ & \ddots & \\ f_{ij}(s) & & s^{\rho_p} \end{bmatrix}.$$

Stupně sloupců interaktoru se nazývají podstatné řády systému,

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p).$$

Seznamy nezáporných celých čísel

Nerovnost, součet, rozdíl seznamů stejné délky je definován po prvcích,

$J_\omega := \{ i \mid \omega_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, p \}$ **je množina indexů nenulových prvků seznamu** ω,

$\operatorname{card} J_\omega$ **je počet nenulových prvků seznamu** ω,

sum ω **je součet všech prvků seznamu** ω.

Operaci $\eta \succ \omega$ **čteme** η **dominuje** ω**, což znamená splnění soustavy nerovností**

$$\sum_{i=1}^{j} \eta'_i \geq \sum_{i=1}^{j} \omega'_i, \quad j = 1, 2, \ldots, l$$

pro seznamy η' **and** ω' **vzestupně uspořádaných seznamů** η **a** ω **délky** l.

Konvence $\Lambda_\alpha(s) := \operatorname{diag}(s^{-\alpha_1}, s^{-\alpha_2}, \ldots, s^{-\alpha_l})$.

Nutné a postačující podmínky řešitelnosti

Nechť systém (A, B, C, D) je zprava invertovatelný a nechť
$\rho := (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)$ je seznam řádů nuly systému v nekonečnu,
$\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-p})$ je seznam indexů řiditelnosti druhého podsystému,
$\Phi(s)$ je interaktor a $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ je seznam podstatných řádů.

Vnitřní vazby v systému lze eliminovat statickou stavovou zpětnou vazbou tehdy a jen tehdy, když existují tři seznamy nezáporných celých čísel
$\varepsilon := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$, $\eta := (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-p})$ a $\eta^* := (\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_p^*)$,
kde η^* je výběr prvků seznamu η, pro který platí $J_{\eta^*} = J_\varepsilon$,

Nutné a postačující podmínky řešitelnosti

a tyto seznamy splňují následující nerovnosti

$$\boxed{\begin{gathered} \varepsilon + \rho \geq \varphi \\ \operatorname{card} J_\omega \leq m - p \\ \varepsilon + \rho \geq \eta^* \\ \eta \leq \sigma \\ \eta \succ \omega \\ \text{sum } \varepsilon = \text{sum } \eta = \text{sum } \omega \end{gathered}} \qquad (\aleph)$$

kde $\omega := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$ je seznam mocnin invariantních faktorů $s^{-\omega_1}, s^{-\omega_2}, \dots, s^{-\omega_p}$ matice $\Phi(s)\Lambda_{\varepsilon+\rho}(s)$.

Seznamy ε, η a η^*

Neregulární stavová zpětná vazba umožňuje eliminovat interakce tím, že připojí řetězce druhého podsystému ke vstupům prvního podsystému, a tím obětuje přebytečné vstupy pro zvýšení řádů nuly v nekonečnu.

- **Seznam ε představuje nárůst jednotlivých řádů nuly systému v nekonečnu, potřebných k dosažení neinteraktivnosti;**
- **seznam η popisuje, které části řetězců druhého podsystému mají být k tomu účelu použity;**
- **seznam η^* označuje, které z těchto použitých řetězců je třeba připojit k externím vstupům.**

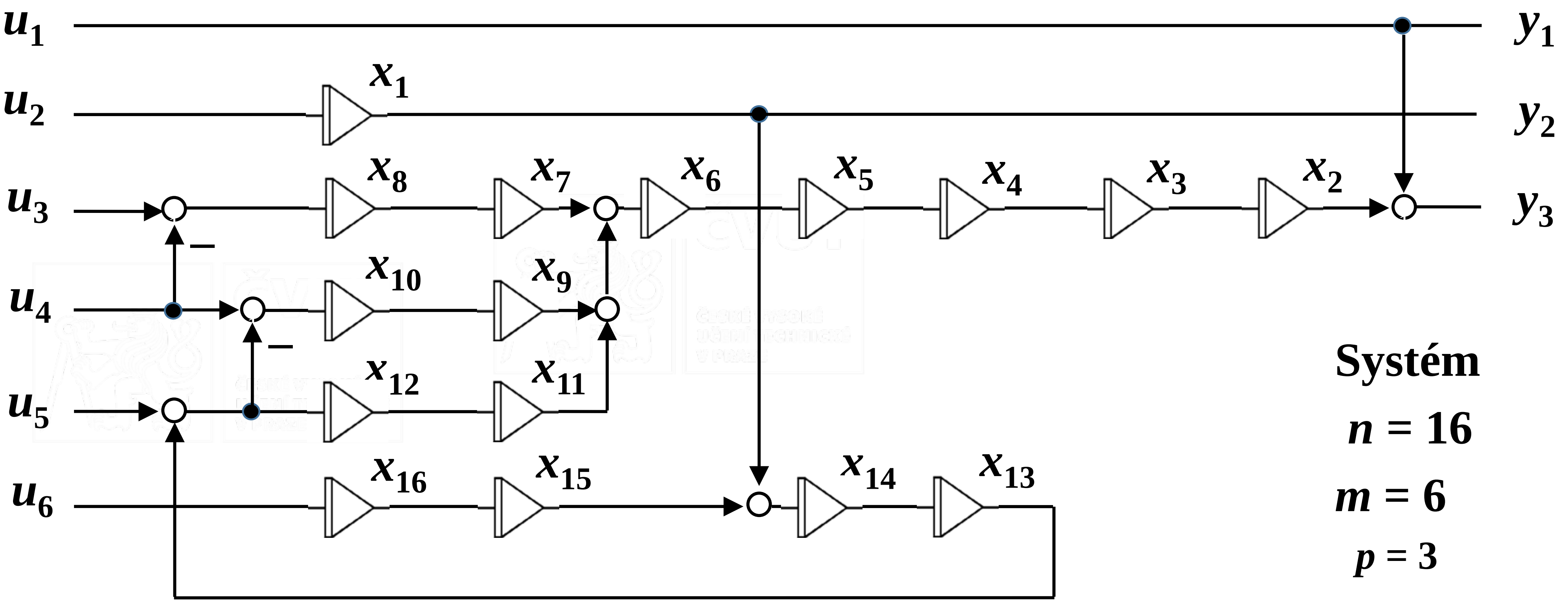
Seznamy ε, η a η^*

**Pokud jsou všechny řetězce druhého podsystému volné,
řešení je jednoduché. Stačí vyřešit soustavu podmínkových nerovností (א).**

**Pokud je některý řetězec druhého podsystému
vázaný s prvním podsystémem, řešení je obtížné.
Je třeba řešit celou rodinu soustav (א) indexovanou vázanými řetězci.**

**Připojení vázaného řetězce lze totiž chápat jako modifikaci systému
a řešit soustavu nerovností (א) pro modifikovaný systém
s využitím zbývajících volných řetězců.**

Příklad



Systém

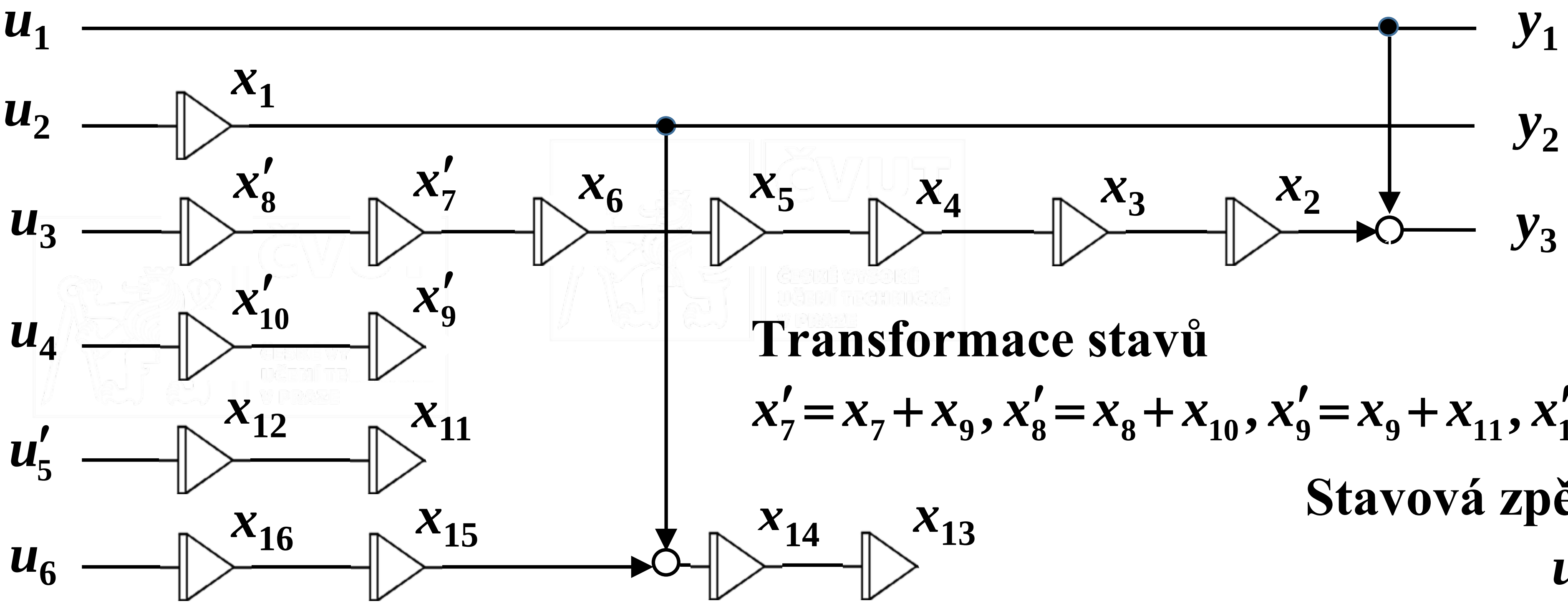
$n = 16$

$m = 6$

$p = 3$

Příklad

Standardní tvar



Transformace stavů

$$x_7' = x_7 + x_9,\ x_8' = x_8 + x_{10},\ x_9' = x_9 + x_{11},\ x_{10}' = x_{10} + x_{12}$$

Stavová zpětná vazba

$$u_5 = u_5' - x_{13}$$

Příklad

Přenosová matice a interaktor

$$T_{dsf}(s) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & s^{-1} & \\ 1 & 0 & s^{-7} \end{bmatrix}, \quad \Phi(s) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & s & \\ -s^7 & 0 & s^7 \end{bmatrix}$$

Invarianty $\rho = (0,1,7)$, $\sigma = (2,2,4)$, $\varphi = (7,1,7)$

Je třeba zvýšit řády nuly v nekonečnu minimálně na hodnoty $\varepsilon = \varphi - \rho = (7,0,0)$ a přitom máme k dispozici volné řetězce $\eta = (2,2,2)$.

Podmínka sum ε = sum η není splněna, bude třeba zapojit vázaný řetězec.

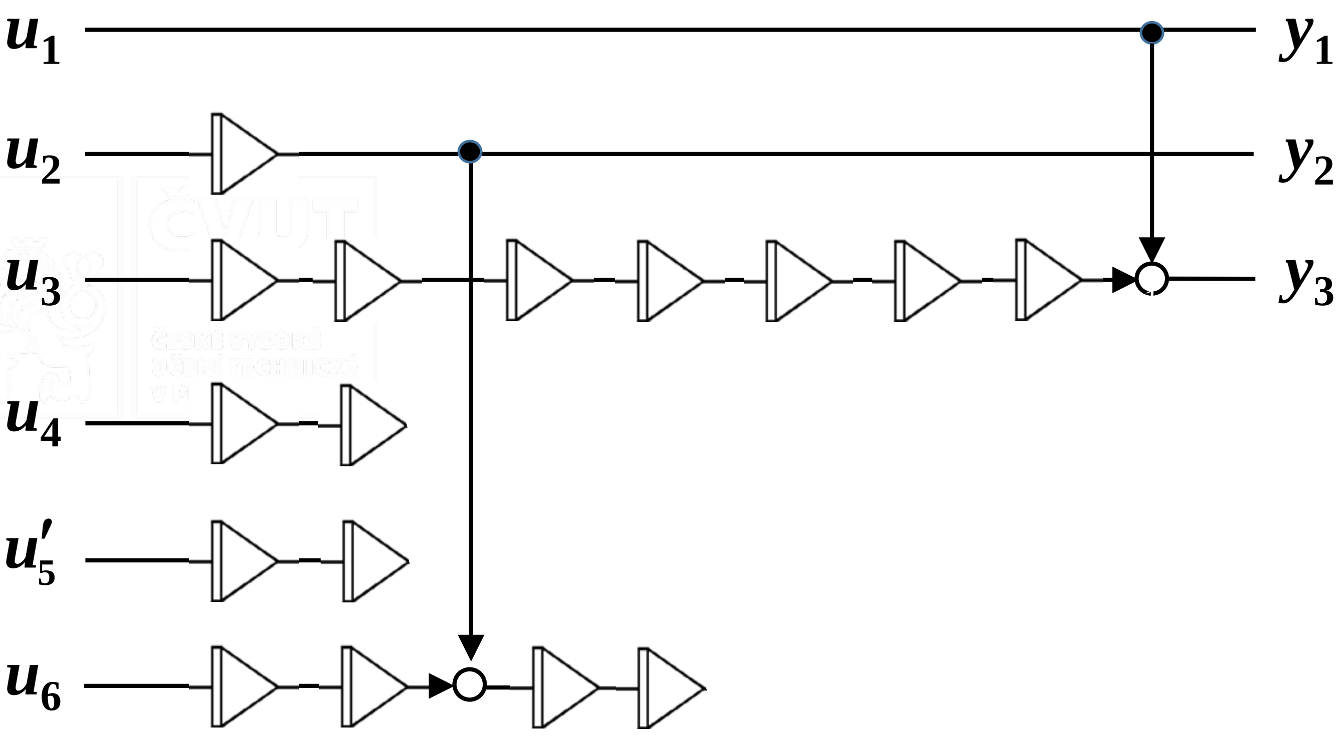
Příklad

Protože

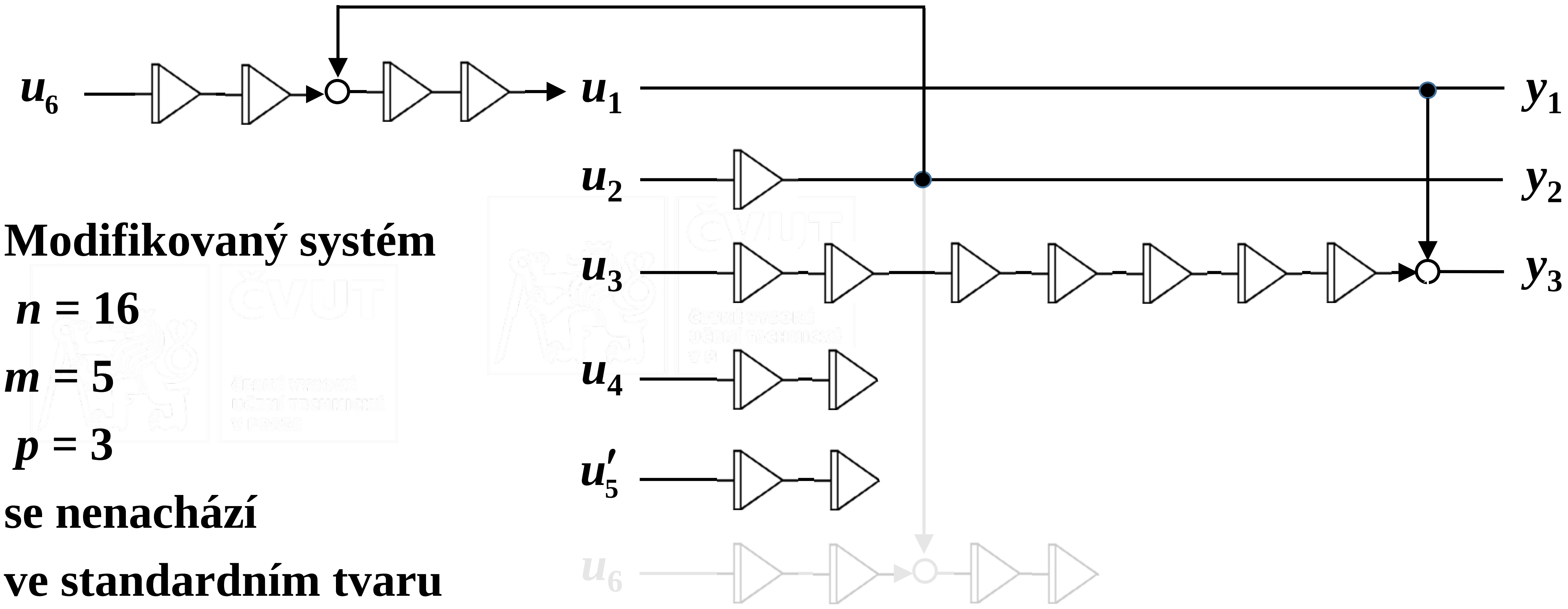
$\varepsilon = (7,0,0)$,

jsou integrátory třeba v prvním kanálu.

Připojíme tedy vázaný řetězec ke vstupu u_1.



Příklad



Modifikovaný systém

$n = 16$

$m = 5$

$p = 3$

se nenachází

ve standardním tvaru

Příklad

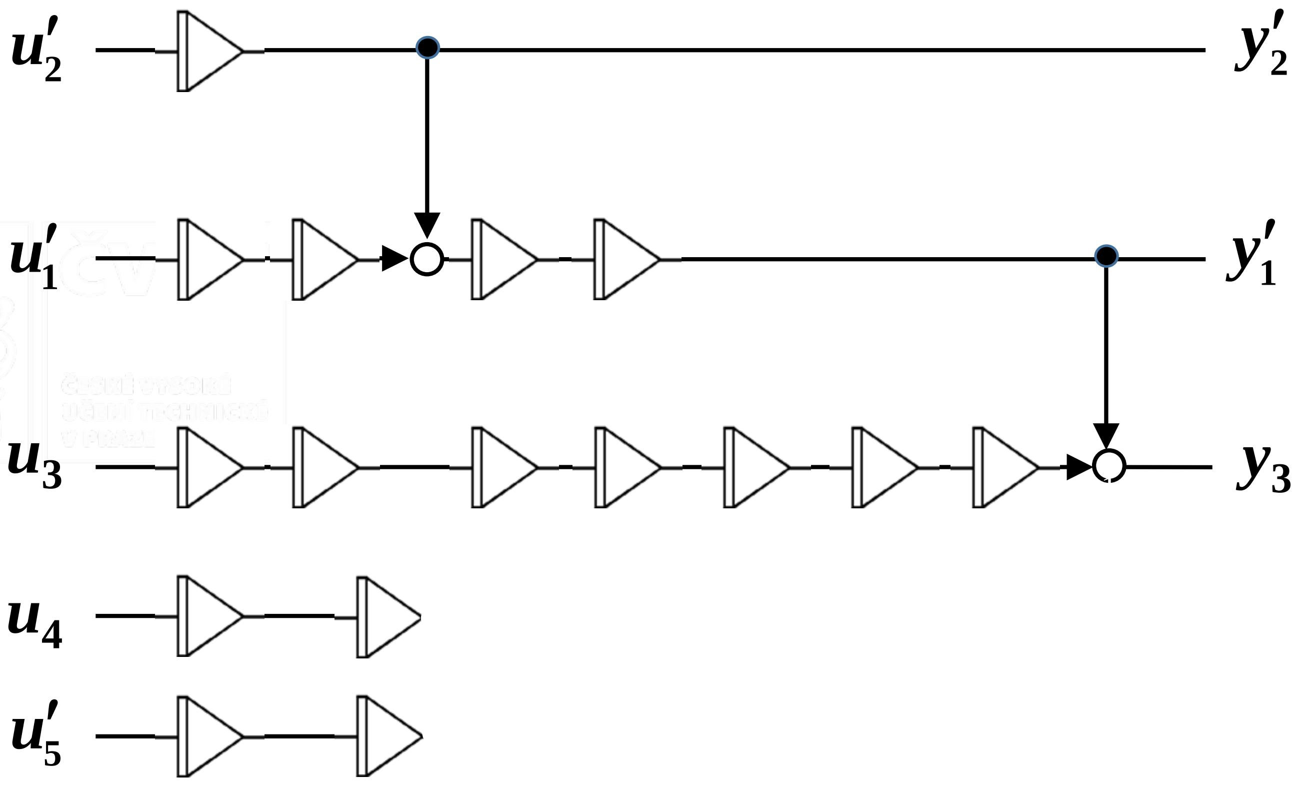
Modifikovaný systém do standardního tvaru převedený

Permutace výstupů

$$y_1' = y_2,\ \ y_2' = y_1$$

Permutace vstupů

$$u_1' = u_2,\ \ u_2' = u_6$$

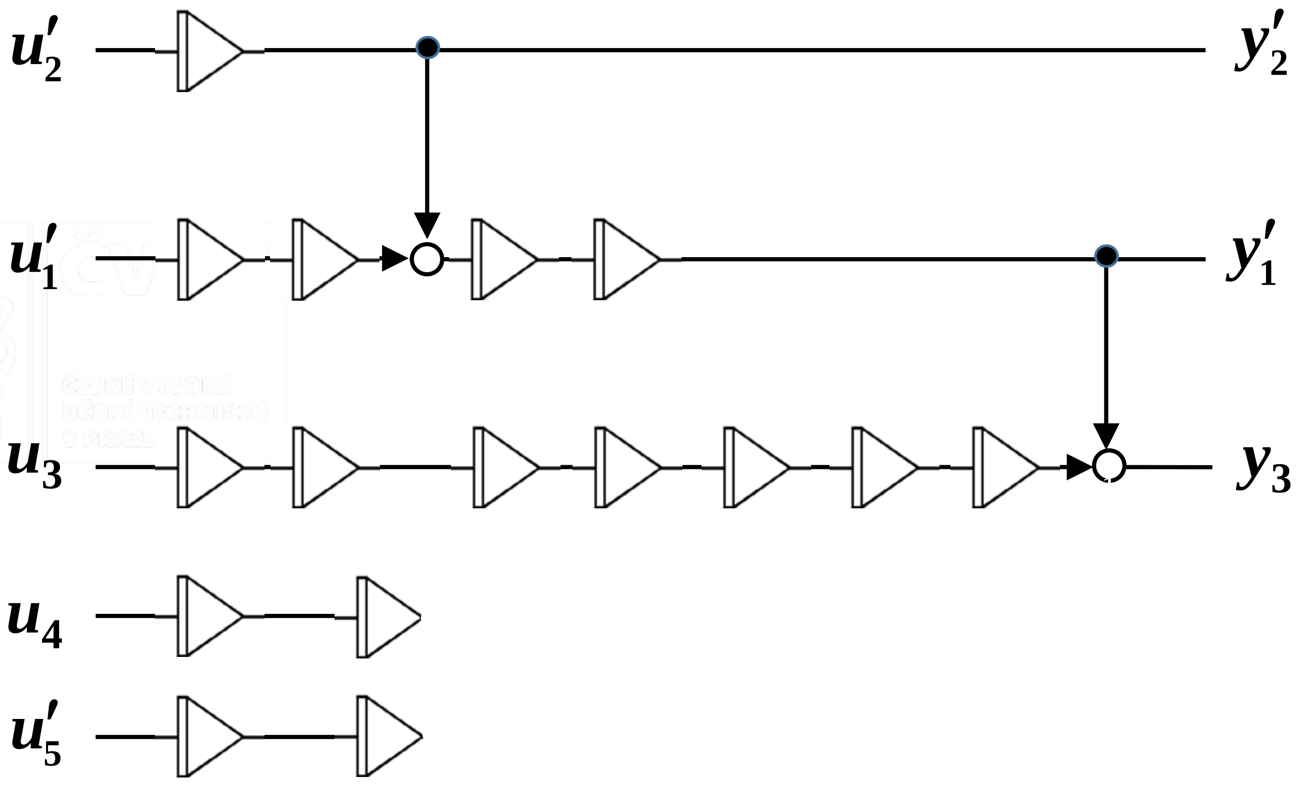


Příklad

Interaktor

$$\Phi_1(s) = \begin{bmatrix} s & & \\ -s^2 & s^4 & \\ 0 & -s^7 & s^7 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1(s)\Lambda_{\varphi_1}(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & & \\ -1 & s^{-3} & \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Invarianty

$\rho_1 = (1,4,7),\ \ \sigma_1 = (2,2),$

$\varphi_1 = (2,7,7),\ \ \omega_1 = (0,0,4)$

Příklad

Modifikovaný systém $n = 16$, $m_1 = 5$, $p = 3$

Invarianty $\rho_1 = (1,4,7)$, $\sigma_1 = (2,2)$, $\varphi_1 = (2,7,7)$, $\omega_1 = (0,0,4)$

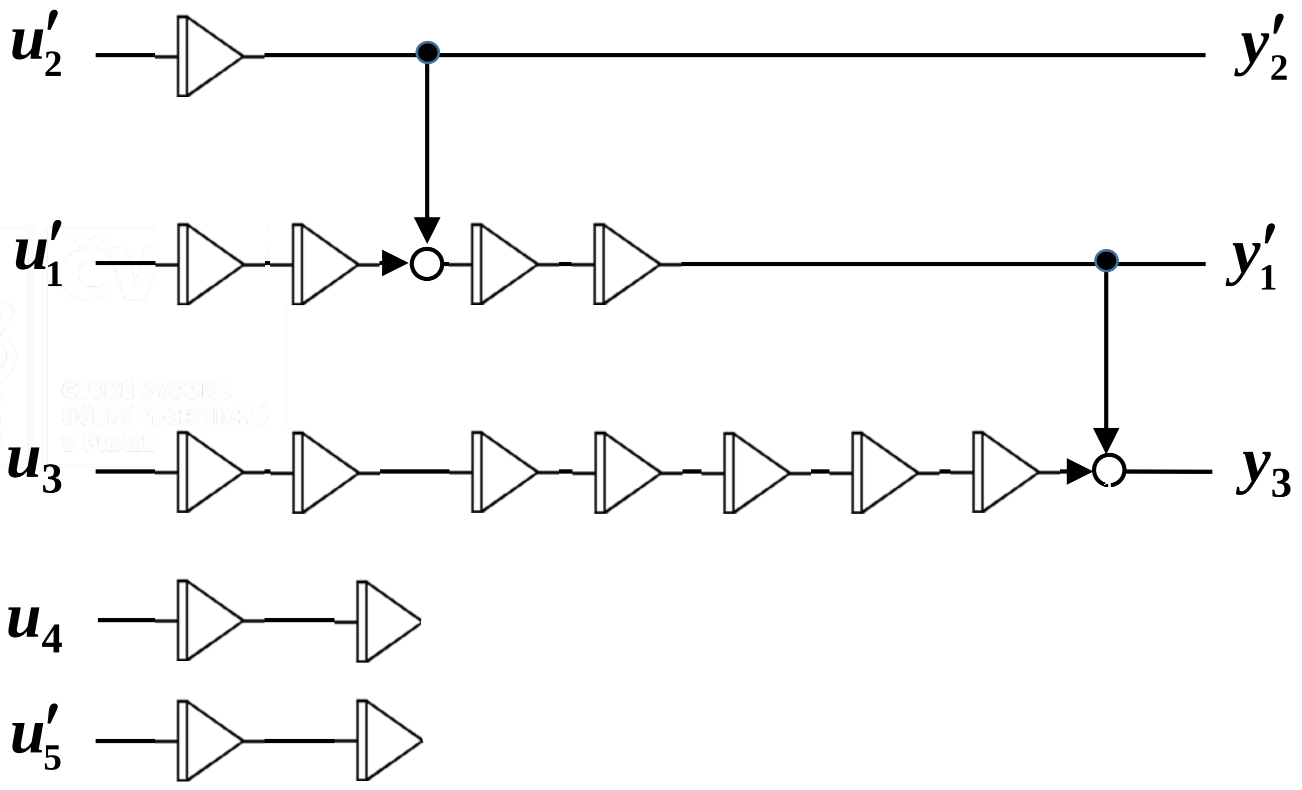
Podmínky (ℵ) splněny pro $\varepsilon_1 = (1,3,0)$, $\eta_1 = (2,2)$, $\eta_1{}^* = (2,2,0)$

$$
\begin{array}{r|c|l}
(1,3,0)+(1,4,7) = & \varepsilon + \rho \geq \varphi & = (2,7,7) \\
1 = & \mathrm{card}\, J_\omega \leq m - p & = 5-3 \\
(1,3,0)+(1,4,7) = & \varepsilon + \rho \geq \eta^* & = (2,2,0) \\
(2,2) = & \eta \leq \sigma & = (2,2) \\
2 \geq 0 & \eta \succ \omega & 2+2 \geq 0+4 \\
4 = & \mathrm{sum}\ \varepsilon = \mathrm{sum}\ \eta = \mathrm{sum}\ \omega & = 4
\end{array}
$$

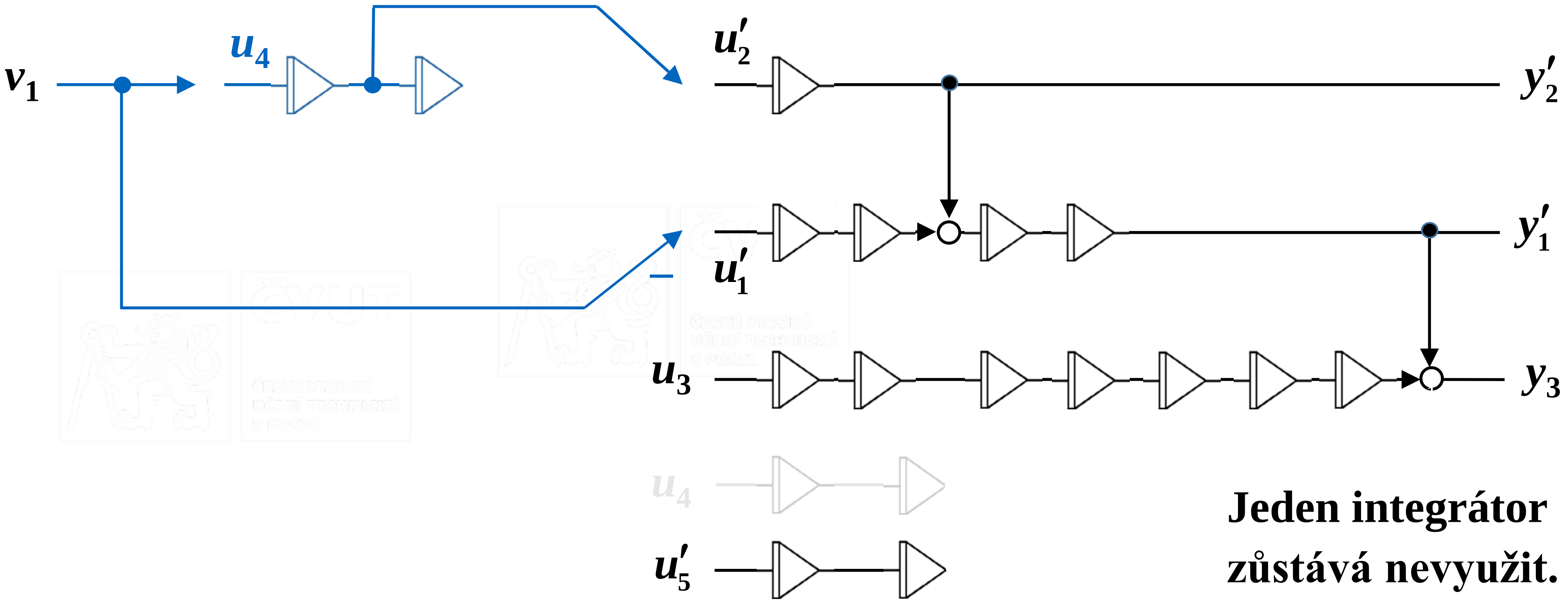
Příklad

$\varepsilon_1 = (1, 3, 0)$

První volný řetězec připojíme k prvnímu vstupu, eliminujeme vazbu $y'_2 \rightarrow y'_1$

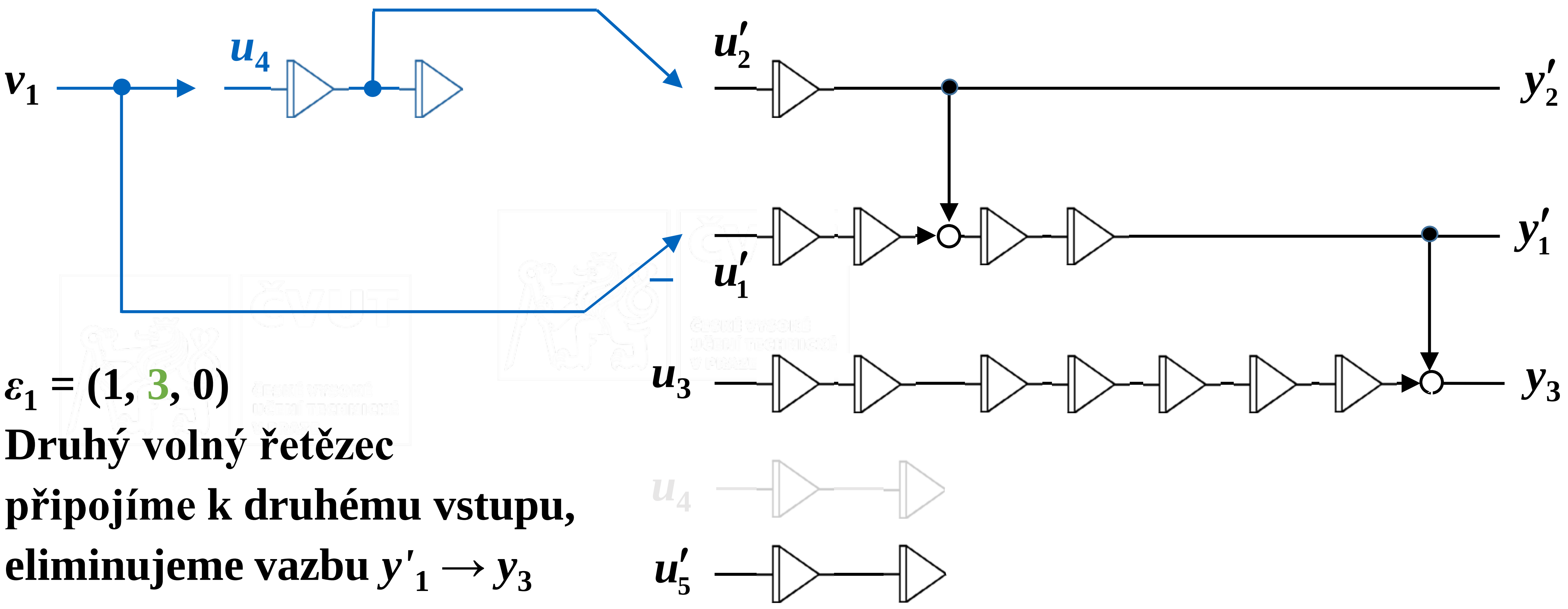


Příklad



Jeden integrátor zůstává nevyužit.

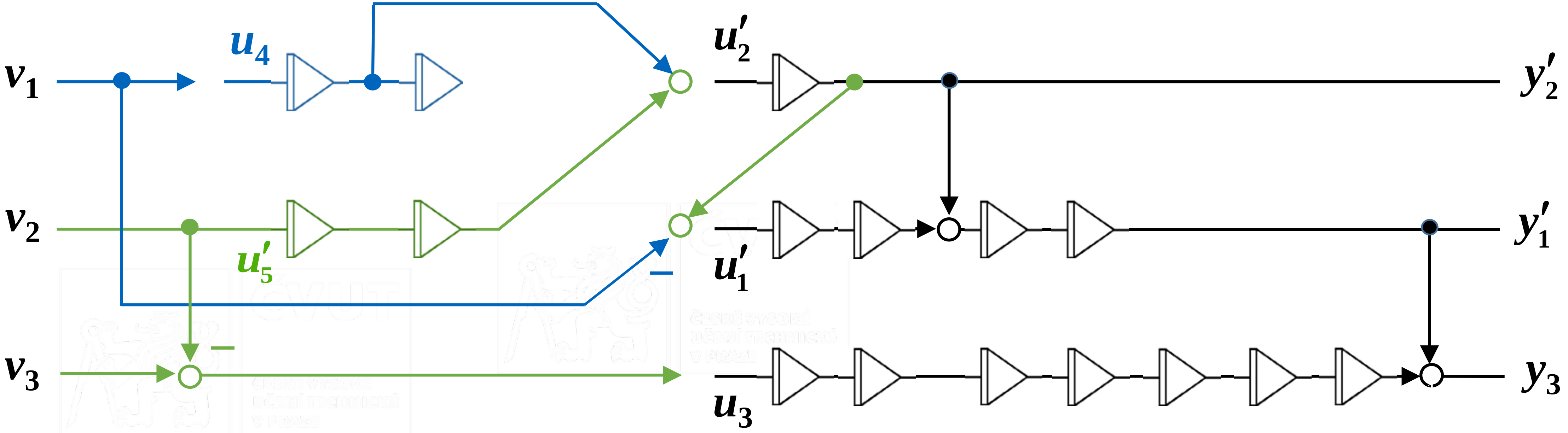
Příklad

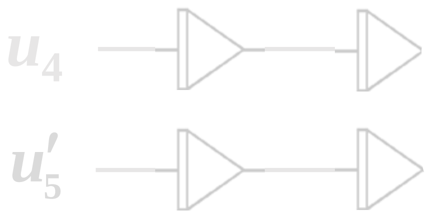


$\varepsilon_1 = (1, 3, 0)$

Druhý volný řetězec připojíme k druhému vstupu, eliminujeme vazbu $y'_1 \rightarrow y_3$

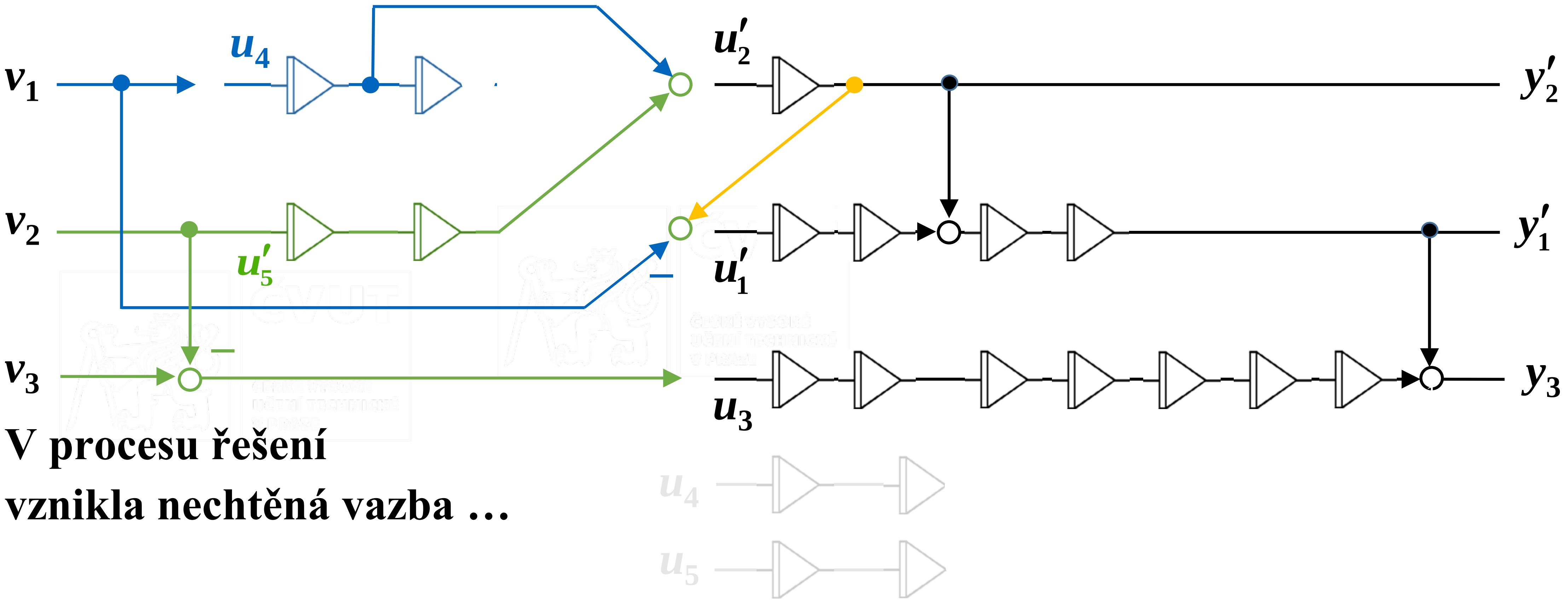
Příklad





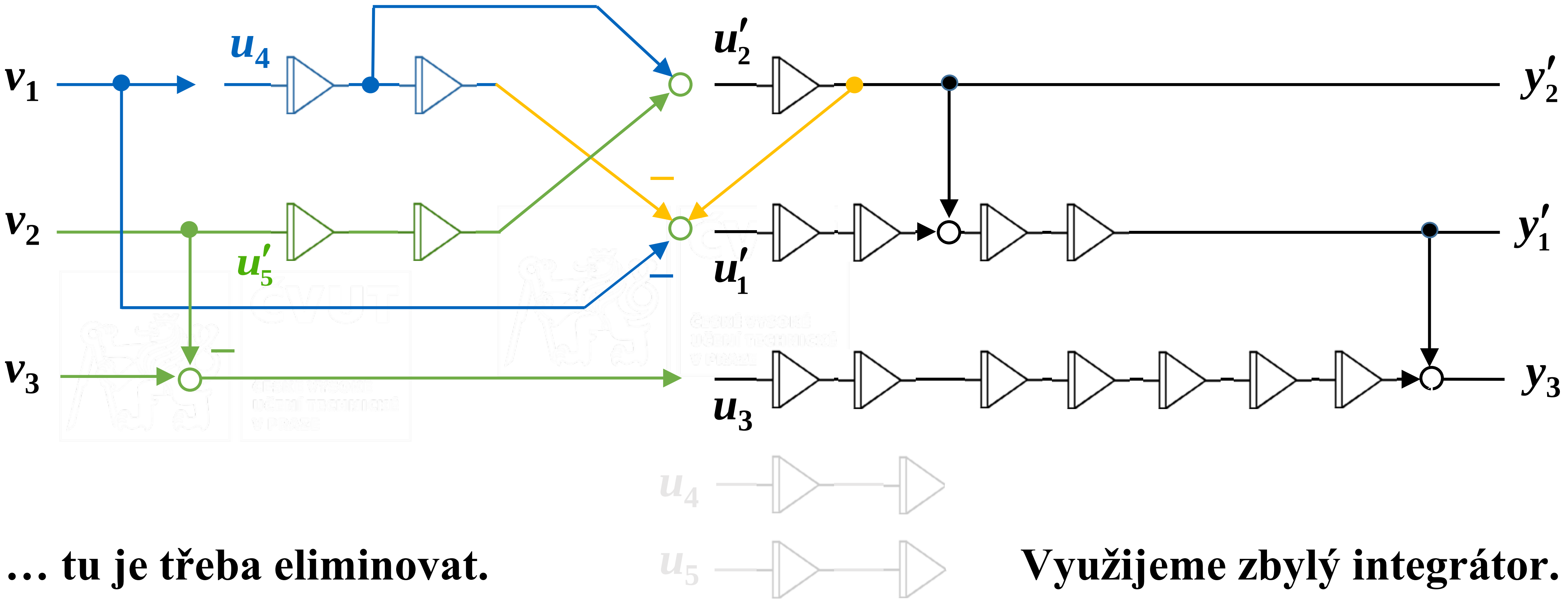
Jeden integrátor se nedostává, půjčíme si ho ze systému.

Příklad



V procesu řešení
vznikla nechtěná vazba …

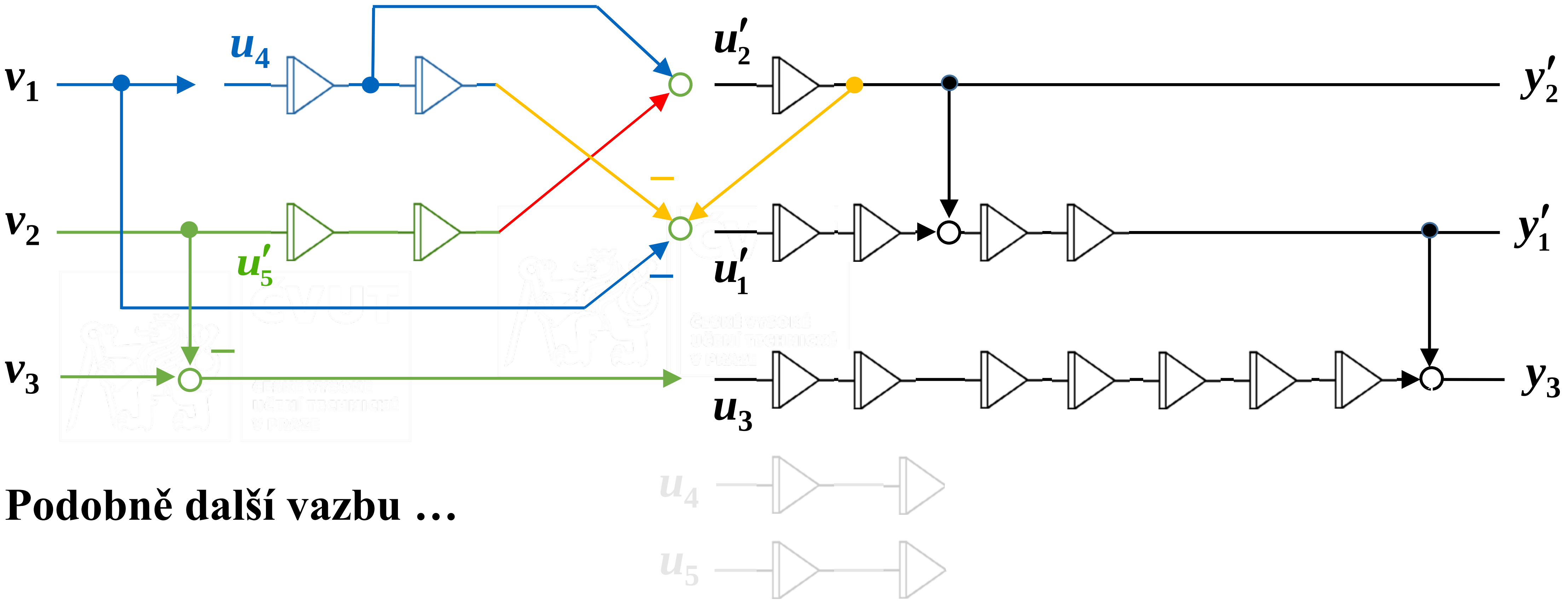
Příklad



… tu je třeba eliminovat.

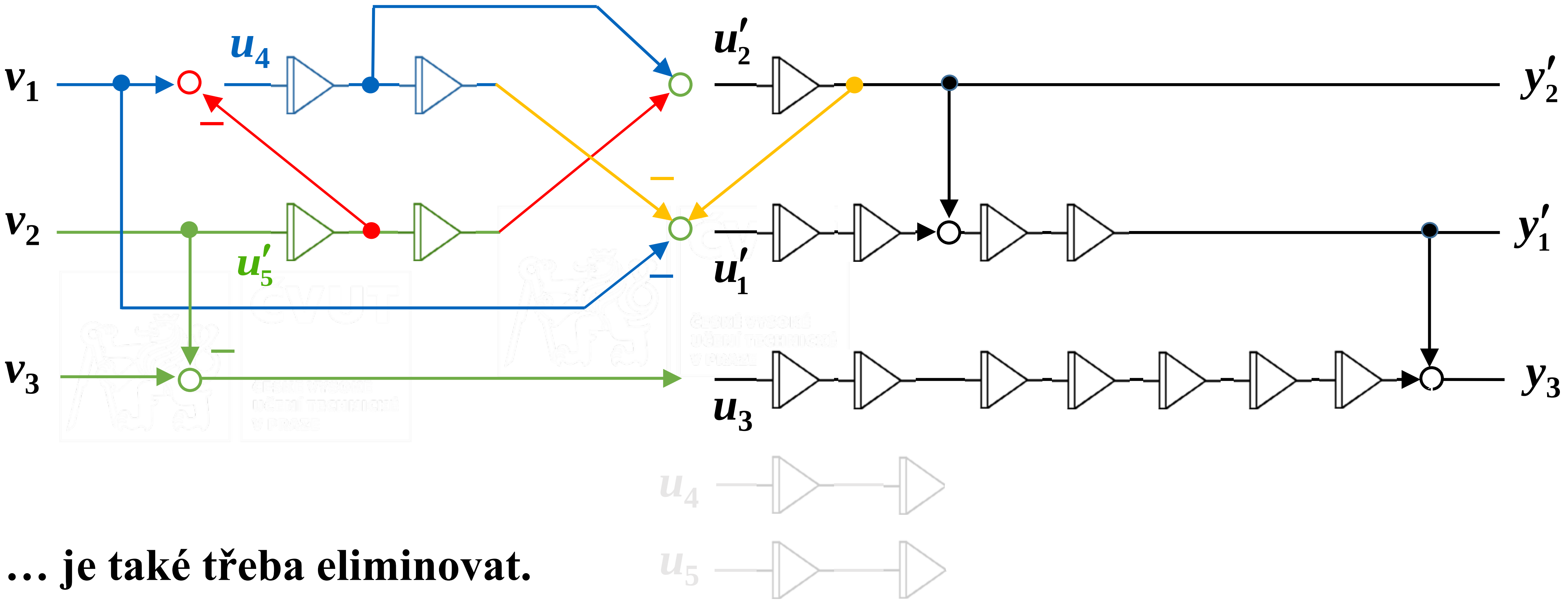
Využijeme zbylý integrátor.

Příklad



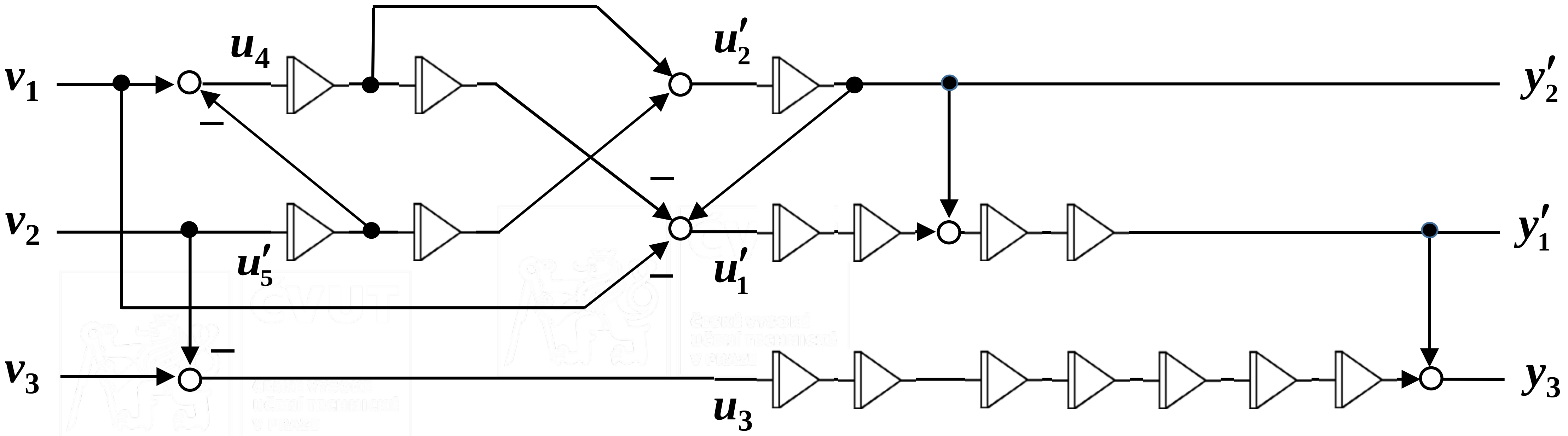
Podobně další vazbu …

Příklad



… je také třeba eliminovat.

Příklad



Výsledný systém bez interakcí má řády nuly v nekonečnu r = (2,7,7).

Maticové operace

Veškeré tyto intuitivní kroky jsou formalizovány pomocí maticových operací.
Začneme s maticí $Z_1(s) := \Phi(s)\Lambda_{\varepsilon+\rho}(s)$ a zkonstruujeme Bézoutovu identitu nad okruhem ryzích racionálních funkcí

$$\begin{bmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(s) \\ Z_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}.$$

Potom matice $\begin{bmatrix} Z_1(s) \\ Z_2(s) \end{bmatrix}$ o rozměrech $m \times p$ je přenos sérového kompenzátoru, který odstraní interakce systému.
Kompenzátor lze realizovat stavovou zpětnou vazbou na standardním systému.
Výslednou zpětnou vazbu získáme po převedení do původních souřadnic.

Závěr

Problém neinteraktivního řízení či eliminace vnitřních vazeb systému pomocí stavové zpětné vazby, známý jako „decoupling“,

je příklad problému, jehož formulace je intuitivně velmi jednoduchá (dosažení diagonálního přenosu), ale jehož řešení je ďábelsky složité. Počet modifikovaných systémů roste s faktoriálem vázaných řetězců, přesto umíme nalézt všechna řešení problému.

Závěr

Problém neinteraktivního řízení či eliminace vnitřních vazeb systému pomocí stavové zpětné vazby, známý jako „decoupling“,

je příklad problému, jehož formulace je intuitivně velmi jednoduchá (dosažení diagonálního přenosu), ale jehož řešení je ďábelsky složité. Počet modifikovaných systémů roste s faktoriálem vázaných řetězců, přesto umíme nalézt všechna řešení problému.

Děkuji vám za pozornost.

Literatura

I. N. Vozněsenskij, “K voprosu o vybore schemy regulirovanija těplofikacionnych turbin (in Russian),” In Za sovětskoje energooborudovanije. Sbornik VITGEO. Gosenergoizdat, 1934.

I. N. Vozněsenskij, “On regulation of machines with a large number of parameters regulated (in Russian),” Automat. i Telemech., No. 4-5, pp. 65-78, 1938.

A. S. Boksenbom and R. Hood, “General algebraic method applied to control analysis of complex engine types,” NACA Rep. 980, 1950.

R. J. Kavanagh, “Noninteracting controls in linear multivariable systems,” AIEE Trans. Applications and Industry, Vol. 76, pp. 95-100, 1957.

B. N. Petrov, “The invariance principle and the conditions for its application during the calculation of linear and non-linear systems,” In Proc. First International Congress of the International Federation of Automatic Control, Moscow, U.S.S.R., pp.117 -125.

V. Strejc, “The general theory of autonomity and invariance of linear systems of control,” Acta Technica, Vol. 5, pp. 235-258, 1960.

Literatura

B. S. Morgan, “The synthesis of linear multivariable systems by state-variable feedback,” IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 9, pp. 405-411, 1964.

P. L. Falb and W. A. Wolovich, “Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems,” IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 12, pp. 651-659, 1967.

A.S. Morse and W. M. Wonham, “Decoupling and pole assignment by dynamic compensation,” SIAM J. Contr., Vol. 8, pp. 317 -337, 1970.

J. Descusse and J. M. Dion, “On the structure at infinity of linear square decoupled systems,” IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 27, pp. 971-974, 1982.

M. L. J. Hautus and H. Heymann, “Linear feedback decoupling: Transfer function analysis,” IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 28, 823-832, 1983.

C. Commault, J. Descusse, M. Dion, J. F. Lafay, and M. Malabre, “New decoupling invariants: the essential orders,” Int. J. Control, Vol. 44, pp. 689-700, 1986.

J. M. Dion and C. Commault, “The minimal delay decoupling problem: Feedback implementation with stability,” SIAM J. Contr. Optimiz., Vol. 26, pp. 66-82, 1988.

Literatura

J. J. Loiseau, “Sur la modification de la stucture á l’infini par retour d’état statique,” SIAM J. Contr. Optimiz., Vol. 26, pp. 251-273, 1988.

J. Descusse, J. F. Lafay, and M. Malabre, “Solution to Morgan’s problem,” IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 8, pp. 732-739, 1988.

A. N. Herrera-Hernandez and J. F. Lafay, “New results about the Morgan’s problem,” IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 38, pp. 1834-1838, 1993.

P. Zagalak, J. F. Lafay, and A. N. Herrera-Hernandez, “The row-by-row decoupling via state feedback: A polynomial approach,” Automatica, Vol.29, pp. 1491-1499, 1993.

E. Castañeda-Toledo and J. Ruiz-León, “On the decoupling problem of linear multivariable systems by static state feedback,” In Proc. 51st IEEE CDC, pp. 3227-3232, Maui, Hawaii, U.S.A., 2012.

J. F. Lafay, “Solution of static reduced decoupling problem for linear systems,” In Prep. 19th IFAC World Congress, Cape Town, South Africa, 2014, pp. 4715-4720.

P. Zagalak and V. Kučera, “Achievable structures at infinity of linear systems decoupled by non-regular static state feedback,” In Proc. 20th IFAC World Congress, pp. 10834-10838,Toulouse, France, 2017.

Literatura

N. Suda, “An elementary derivation of Kronecker canonical form for linear time-invariant systems,” In Prep. IFAC Symp. Advances in Control Education, Tokyo, Japan, 1994, pp. 73-76.

M. Newmann. Integral Matrices. New York, Academic Press, 1972, p. 26.

A. S. Morse, “Structural invariants of linear multivariable systems,” SIAM J. Contr. Optimiz., Vol. 11, pp. 446-465, 1973.

W. A. Wolovich and P. L. Falb, “Invariants and canonical forms under dynamic compensation,” SIAM J. Control, Vol.14, pp. 996- 1008, 1976.

A. N. Herrera-Hernandez, J. F. Lafay, and P. Zagalak, “The extended interactor in the study of nonregular control laws,” In Proc. 30th IEEE CDC, Brighton, U.K., 1991, pp. 273-278.

M. L. J. Hautus and M. Heymann, “Linear feedback, an algebraic approach,” SIAM J. Contr. Optimiz., Vol. 16, pp. 83-105, 1978.

V. Kučera and P. Zagalak, “Constant solutions of polynomial equations,” Int. J. Control, Vol. 53, pp. 495-502, 1991.