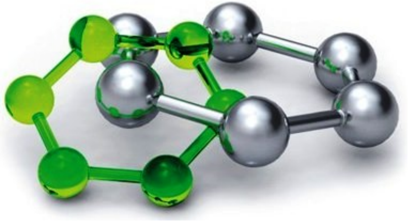
CEITEC
central european institute of technology
BRNO | CZECH REPUBLIC

Identifikace časově proměnných systémů jako statistický rozhodovací problém



6. září 2018

Ing. Jakub Dokoupil, Ph.D.

Popis systému

CEITEC

Normální, regresní model

$$y_k = h_k'\theta + e_k, \qquad e_k \sim \mathcal{N}(0, r). \tag{1}$$

- $h_k \equiv [u_k, u_{k-1}, \ldots, u_{k-n_u}, -y_{k-1}, \ldots, -y_{k-n_y}]' \in \mathbb{R}^p$ je známý regresní vektor dat;
- $\theta \in \mathbb{R}^p$ je náhodný vektor neznámých parametrů modelu;
- e_k je normálně rozdělený, diskrétní bílý šum se známou a konstantní variancí r

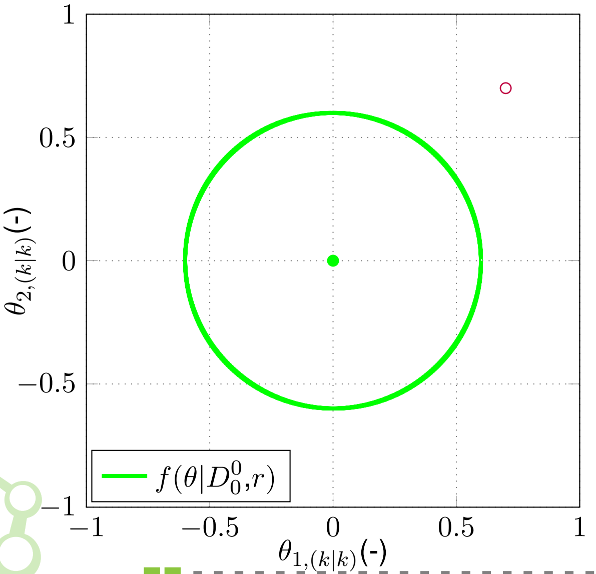
Inferenční problém

Bayesův vzorec - funkcionální rekurze

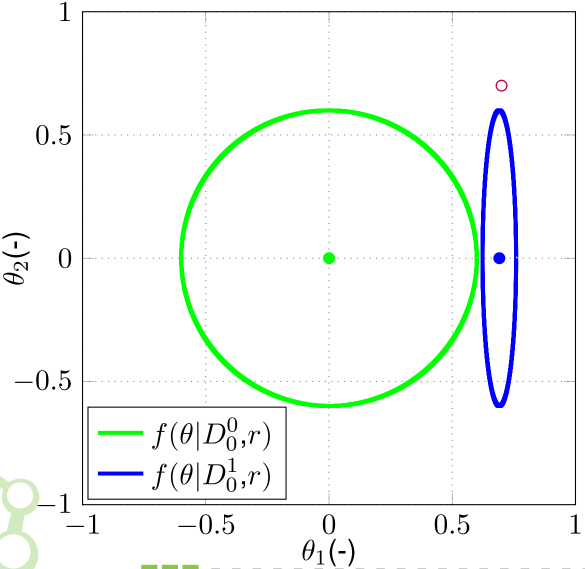
$$\underbrace{f\left(\theta \middle| D_{1-n}^{k}, r\right)}_{\text{posteriorní fhp}} \propto \underbrace{f\left(y_k \middle| h_k, \theta, r\right)}_{\text{parametrický model}} \underbrace{f\left(\theta \middle| D_{1-n}^{k-1}, r\right)}_{\text{predikční fhp}}. \quad (2)$$

- $f(\theta|D_{1-n}^{0}, r)$ je apriorní fhp inicializující rekurzi;
- $D_{1-n}^{k} \equiv \{u_\gamma, y_\gamma\}_{\gamma=1-n}^{k}$ je množina vstupně-výstupních dat;
- $f\left(y_k \middle| h_k, \theta, r\right) = \mathcal{N}\left(h_k'\theta, r\right)$;
- $f\left(\theta \middle| D_{1-n}^{k-1}, r\right) = \mathcal{N}\left(\hat{\theta}_{k|k-1}, rP_{k|k-1}\right)$

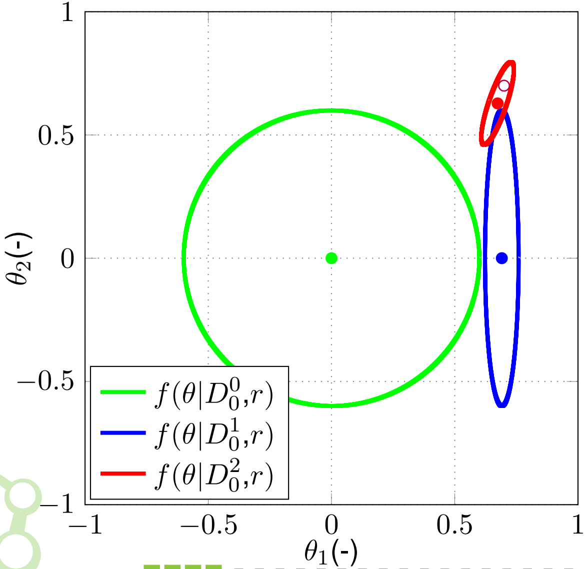
Inferenční problém - elipsa chyb



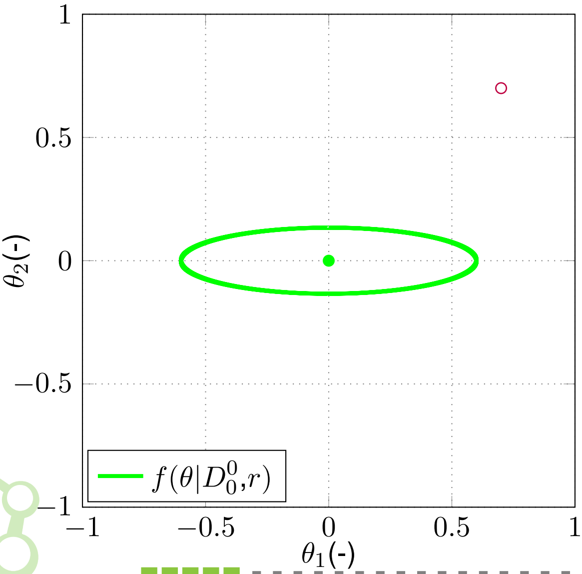
Inferenční problém - elipsa chyb



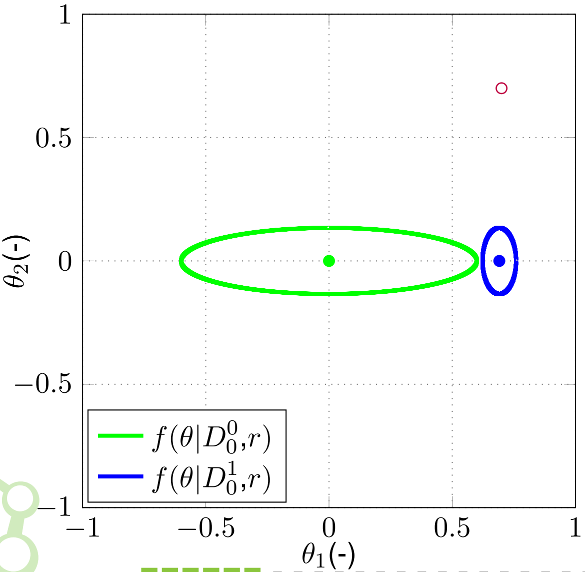
Inferenční problém - elipsa chyb



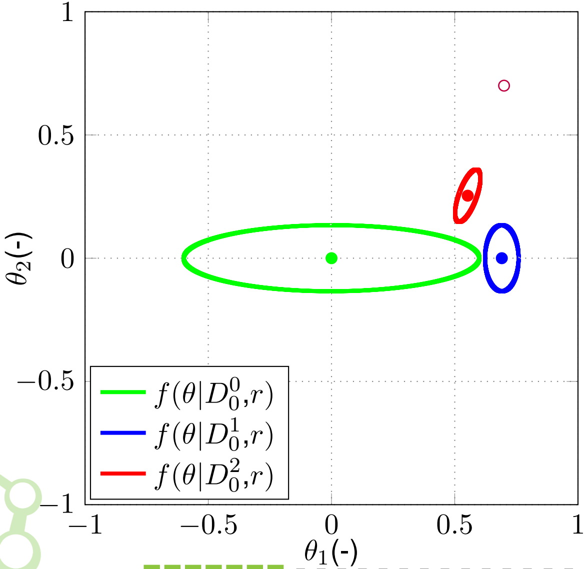
Inferenční problém - elipsa chyb



Inferenční problém - elipsa chyb



Inferenční problém - elipsa chyb



Inferenční problém

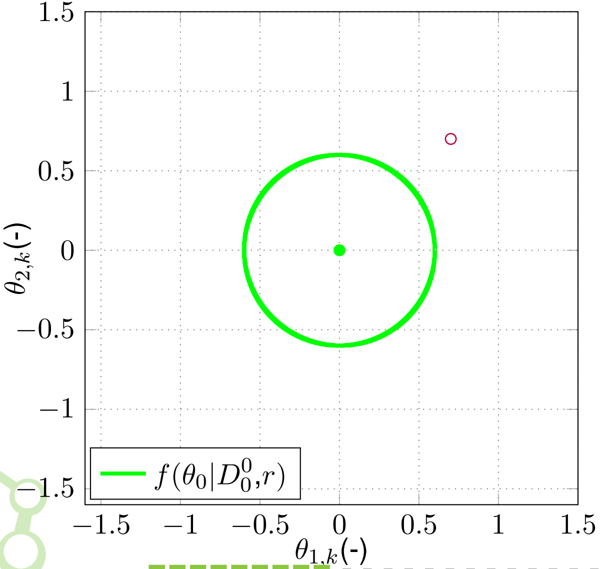
CEITEC

Modifikovaný Bayesův vzorec - predikční fhp vzniká zploštěním posteriorní fhp

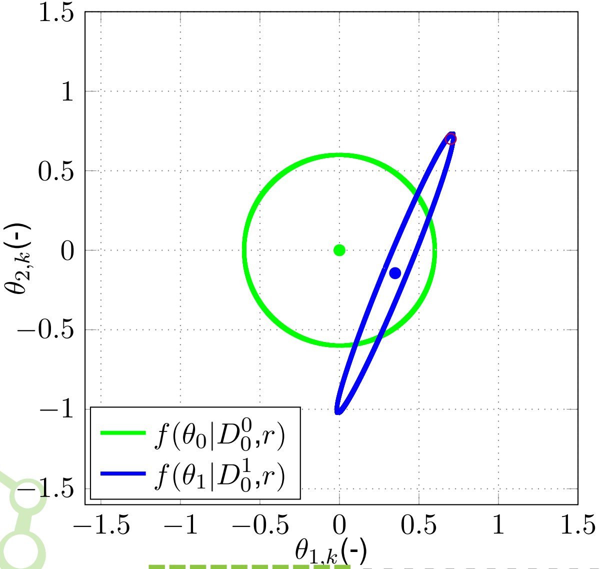
$$f\left(\theta_k \middle| D_{1-n}^{k}, r\right) \propto f\left(y_k \middle| h_k, \theta_k, r\right) f\left(\theta_{k-1} \middle| D_{1-n}^{k-1}, r\right)^{\lambda}. \qquad (3)$$

- $\lambda \in (0,1)$ je faktor zapomínání;
- metoda předpokládá pomalé změny ve vývoji parametrů, tedy $\theta_{k+1} \approx \theta_k$

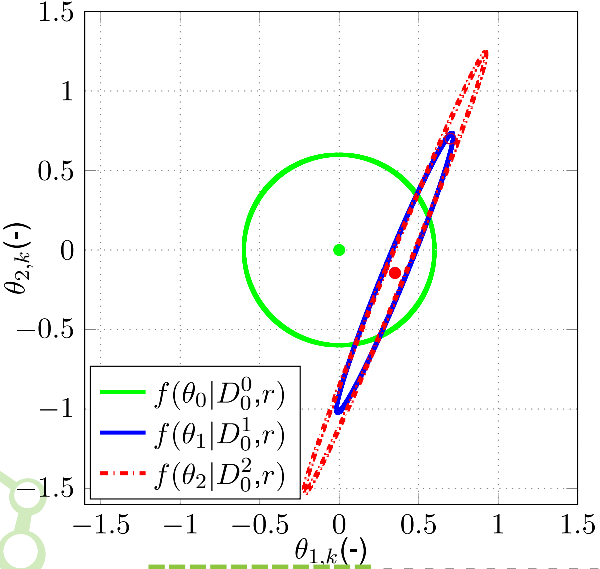
Inferenční problém - elipsa chyb



Inferenční problém - elipsa chyb



Inferenční problém - elipsa chyb



Inferenční problém - regularizované odhadování

CEITEC

Parametrická rovnice modelu

$$y_k = g(h_k, \theta_k) + e_k, \qquad e_k \sim \mathcal{N}(0, 1/d_k)\,. \tag{4}$$

- $g(\cdot)$ je známá diferencovatelná funkce;
- $1/d_k$ je neznámou variancí;
- $\Theta_k \equiv \{\theta_k, d_k\}$ bude dále označovat uspořádanou množinu neznámých parametrů

Formální rovnice vývoje parametrů

$$\Theta_k = \Theta_{k-1}. \tag{5}$$

Inferenční problém - regularizované odhadování

CEITEC

Externí informace popisující chování systému

$$\theta_0 = \alpha_k + w_k, \qquad w_k \sim \mathcal{N}\big(0, \Xi_k^{-1}/d_k\big), \tag{6}$$

$$d_0 = \beta_k, \qquad \beta_k \sim \mathcal{W}\big(\Sigma_{c;k}, \nu_{c;k}\big), \tag{7}$$

- $\alpha_k \in \mathbb{R}^p$ je známý vektor;
- Ξ_k je známou normalizovanou informační maticí vektoru $w_k \in \mathbb{R}^p$;
- $\mathcal{W}(\cdot)$ je Wishartova fhp s $\nu_{c;k}$ stupni volnosti;
- $\Pi_k \equiv \{\alpha_k, \Xi_k, \Sigma_{c;k}, \nu_{c;k}\}$

Parametrický model

$$f\left(y_k \middle| h_k, \Theta_k\right) \simeq \left(2\pi/d_k\right)^{-1/2} \times \exp\left[-\left[\theta_k', \quad 1\right] \psi_{i,k}\psi_{i,k}' \left[\theta_k', \quad 1\right]' d_k/2\right], \tag{8}$$

kde tvar pomocného vektoru $\psi_{i,k}$

$$\begin{aligned} \psi_{i,k} &= \left[\zeta_{i,k}', \quad -y_k + g_k(h_k, \hat{\theta}_{i,k}) - \zeta_{i,k}'\hat{\theta}_{i,k}\right]', \\ \zeta_{i,k} &= \partial g_k(h_k, \theta_k)/\partial\theta_k|_{\theta_k = \hat{\theta}_{i,k}} \end{aligned} \tag{9}$$

vychází z Taylorova rozvoje $g(h_k, \theta_k)$ v okolí $\hat{\theta}_{i,k}$.

Inferenční problém - aktualizace prediktční fhp

Prediktční fhp

$$f\left(\Theta_k \middle| D_{1-n}^{k-1}, \Pi_{k-1}\right) = \mathcal{N}\left(\hat{\theta}_{k|k-1}, P_{\zeta;k|k-1}/d_k\right)\mathcal{W}\left(\Sigma_{k|k-1}, \nu_{k|k-1}\right) \tag{10}$$
$$\propto d_k^{(\nu_{k|k-1}+p-2)/2} \exp\left[-\left[\theta_k', \quad 1\right] V_{k|k-1} \left[\theta_k', \quad 1\right]' d_k/2\right]$$

se statistikami $\hat{\theta}_{k|k-1}$, $P_{\zeta;k|k-1} = {}^{\lfloor P_\zeta}U_{k|k-1}\,{}^{\lfloor P_\zeta}D_{k|k-1}\,{}^{\lfloor P_\zeta}U'_{k|k-1}$ a $\Sigma_{k|k-1}^{-1}$ generovanými dekompozicí matice $P_{k|k-1} \equiv V_{k|k-1}^{-1}$,

$$P_{k|k-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{\lfloor P_\zeta}U_{k|k-1} & \hat{\theta}_{k|k-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{\lfloor P}U_{k|k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{\lfloor P_\zeta}D_{k|k-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{k|k-1}^{-1} \end{bmatrix}}_{{}^{\lfloor P}D_{k|k-1}} \left[{}^{\lfloor P}U_{k|k-1}\right]'. \tag{11}$$

Inferenční problém - aktualizace prediktivní fhp

CEITEC

Funkce hustoty pravděpodobnosti $f(\Theta_k|\Pi_k)$

$$f(\Theta_k|\Pi_k) \propto d_k^{(\nu_{c;k}\prod_{\gamma=0}^{k-1}\lambda_{\gamma+1|\gamma}+p-2)/2} \times \exp\left[-\left[\theta_k', \quad 1\right] V_{c;k} \prod_{\gamma=0}^{k-1} \lambda_{\gamma+1|\gamma} \left[\theta_k', \quad 1\right]' d_k/2\right], \tag{12}$$

kde

$$V_{c;k} = \begin{bmatrix} {}^{\lfloor\Xi}L_k & 0 \\ -\alpha_k' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\lfloor\Xi}D_k & 0 \\ 0 & \Sigma_{c;k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\lfloor\Xi}L_k & 0 \\ -\alpha_k' & 1 \end{bmatrix}'. \tag{13}$$

Inferenční problém - aktualizace prediktční fhp

Modifikovaný Bayesův vzorec pro $f(\Theta_k|D_{1-n}^k,\Pi_k)$

$$\begin{aligned} f\left(\Theta_k\middle|D_{1-n}^k,\Pi_k\right) &= \mathcal{N}\left(\hat{\theta}_{k|k},P_{\zeta;k|k}/d_k\right)\mathcal{W}\left(\Sigma_{k|k},\nu_{k|k}\right) \\ &\propto \prod_{\kappa=k_1+1}^{k} f^{\prod_{\gamma=\kappa}^{k-1}\lambda_{\gamma+1|\gamma}}\left(y_\kappa\middle|h_\kappa,\Theta_k\right) \\ &\times \frac{f\left(\Theta_k\middle|D_{1-n}^{k_1},\Pi_{k_1}\right)f\left(\Theta_k\middle|\Pi_k\right)}{f\left(\Theta_k\middle|\Pi_{k_1}\right)}, \end{aligned} \tag{14}$$

kde volbou k_1 přepínáme mezi off-line ($k_1 = 0$) a on-line ($k_1 = k - 1$) strategií učení.

CEITEC

Aktualizace predikčních statistik

$$\nu_{k|k} = \nu_{k|k-1} + 1 + \underbrace{(\nu_{c;k} - \nu_{c;k-1}) \prod_{\gamma=0}^{k-1} \lambda_{\gamma+1|\gamma}}_{r_k}, \tag{15}$$

$$V_{k|k} = V_{k|k-1} + \psi_{i,k}\psi'_{i,k} + \underbrace{(V_{c;k} - V_{c;k-1}) \prod_{\gamma=0}^{k-1} \lambda_{\gamma+1|\gamma}}_{R_k}. \tag{16}$$

- volbou $r_k = \nu_{c;k} - \lambda_{k|k-1}\nu_{c;k-1}$ a $R_k = V_{c;k} - \lambda_{k|k-1}V_{c;k-1}$ odstraníme efekt zapomínání na tu část informace, která je dodávána externě

Rozhodovací problém

Vstupy do statistického rozhodování

Volba predikční fhp se uskutečňuje na bázi slučování dílčích predikčních alternativ. Tato úloha může být chápána jako statistický rozhodovací problém:

- v našem případě je parametrický prostor f_H^* tvořen dvojicí alternativ
  - $f_0(\Theta_{k+1}) \equiv \mathcal{N}(\hat{\theta}_{k|k}, P_{\zeta;k|k}/d_{k+1})\mathcal{W}(\Sigma_{k|k}, \nu_{k|k})$;
  - $f_1(\Theta_{k+1}) \propto d_{k+1}^{(p-2)/2}$;
- míra nesouladu mezi dvojicí fhp je ohodnocena Kullbackovou-Leiblerovou divergenci (KLD)

$$\mathcal{D}(f(\Theta)\|f_H(\Theta)) \equiv \int_{\Theta^*} f(\Theta) \ln\left(\frac{f(\Theta)}{f_H(\Theta)}\right) \mathrm{d}\Theta; \qquad (17)$$

Rozhodovací problém

Vstupy do statistického rozhodování

- nezáporné odhady ztrát $\varrho_H^* \equiv \{\varrho_0, \varrho_1\}$ poskytují zpětnou vazbu o přesnosti dosažené jednotlivými predikčními alternativami

$$\varrho_0 \equiv (1+\rho)\mathcal{D}\Big(f\Big(\Theta_k \,\Big|\, D_{1-n}^k, \Pi_k\Big) \Big\| f\big(\Theta_k \big| D_{1-n}^{k-1}, \Pi_{k-1}\big)\Big), \quad (18)$$

$$\varrho_1 \equiv \mathcal{D}\Big(f\Big(\Theta_k \,\Big|\, D_{1-n}^k, \Pi_k\Big) \Big\| f_1(\Theta_k)\Big), \quad (19)$$

kde $\rho \geq 0$ je uživatelem definovaný faktor;
- prvky vektoru pravděpodobností $\varphi \equiv [\varphi_0, \varphi_1]'$ jsou přidružené ke každé z přípustných realizací výrazu $\{f_H, \varrho_H\}$;

Rozhodovací problém

Vstupy do statistického rozhodování

Ztrátový funkcionál ohodnocující krok časové aktualizace je ve tvaru

$$\begin{aligned}\phi(f(\Theta_{k+1}),\varphi) &\equiv \mathcal{E}_{\{f_H,\varrho_H\}}\left[\mathcal{D}\left(f(\Theta_{k+1})\middle\| f_H(\Theta_{k+1})\right) - \varrho_H\right] \\ &= \sum_{i=0}^{1} \varphi_i\left[\mathcal{D}\left(f(\Theta_{k+1})\middle\| f_i(\Theta_{k+1})\right) - \varrho_i\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Rozhodovací problém

Optimální strategie zapomínání

Optimální strategie kombinující $f_0(\Theta_{k+1})$ a $f_1(\Theta_{k+1})$ s ohledem na normalizující omezení $\int_{\Theta^*} \hat{f}(\Theta_{k+1})\, \mathrm{d}\Theta_{k+1} = 1$ je dána

$$\hat{f}(\Theta_{k+1}) = \frac{f_0^{\varphi_0}(\Theta_{k+1})\, f_1^{\varphi_1}(\Theta_{k+1})}{\int_{\Theta^*} f_0^{\varphi_0}(\Theta_{k+1})\, f_1^{\varphi_1}(\Theta_{k+1})\, \mathrm{d}\Theta_{k+1}} = \arg \min_{f(\Theta_{k+1})} \phi(f(\Theta_{k+1}), \varphi). \tag{21}$$

Časová aktualizace statistik $\{\hat{\theta}_{k|k}, P_{\zeta;k|k}, \Sigma_{k|k}, \nu_{k|k}\}$

Mechanismus slučování se substitucí $\lambda_{k+1|k} \equiv \hat{\varphi}_0$ vede na aktualizaci

$$V_{k+1|k} = \lambda_{k+1|k} V_{k|k}, \tag{22}$$

$$\nu_{k+1|k} = \lambda_{k+1|k} \nu_{k|k}. \tag{23}$$

Rozhodovací problém

Automatické nastavování faktoru zapomínání

Hledání hodnoty parametru φ, který je maximem funkce

$$\hat{\varphi} = \arg\max_{\varphi} \min_{f(\Theta_{k+1})} \phi\big(f(\Theta_{k+1}), \varphi\big) \tag{24}$$

je ekvivalentní k hledání takového φ, který splňuje následující podmínky:

$$\mathcal{D}\big(\hat{f}(\Theta_{k+1}) \big\| f_i(\Theta_{k+1})\big) - \varrho_i = \mu, \qquad \text{all } i \text{ such that } \varphi_i > 0 \tag{25}$$

$$\mathcal{D}\big(\hat{f}(\Theta_{k+1}) \big\| f_i(\Theta_{k+1})\big) - \varrho_i \leq \mu, \qquad \text{all } i \text{ such that } \varphi_i = 0 \tag{26}$$

Rozhodovací problém

Výpočet faktoru zapomínání

Vyhodnotíme-li hodnotu faktoru zapomínání ($\lambda_{k+1|k} \equiv \hat{\varphi}_1$) podle uvedeného postupu, pak obdržíme výpočet

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1|k}^{-1} = 1 + \frac{\rho+1}{p+1}\Bigg\{ & \ln\left(\frac{\left|{}^{\lfloor P_\zeta} D_{k|k-1}\right|}{\left|{}^{\lfloor P_\zeta} D_{k|k}\right|}\right) \\
& + \operatorname{tr}\left(V_{\zeta;k|k-1} P_{\zeta;k|k} - I_p\right) + \nu_{k|k-1} \ln\left(\frac{\Sigma_{k|k}}{\Sigma_{k|k-1}}\right) \\
& - \nu_{k|k}\left(1 - \Sigma_{k|k-1}\Sigma_{k|k}^{-1}\right) \\
& + \frac{\nu_{k|k}}{\Sigma_{k|k}}\left(\hat{\theta}_{k|k} - \hat{\theta}_{k|k-1}\right)' V_{\zeta;k|k-1}\left(\hat{\theta}_{k|k} - \hat{\theta}_{k|k-1}\right) \\
& + \left(\nu_{k|k-1} - 1\right)\ln\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{\nu_{k|k}}\right) + \frac{\nu_{k|k-1}}{\nu_{k|k}} + \nu_{k|k} - \nu_{k|k-1} - 1 \Bigg\}
\end{aligned} \tag{27}$$

Rozhodovací problém

Výpočet faktoru zapomínání - pokračování

doprovázený vztahem

$$V_{\zeta;k|k} = \underbrace{\lambda_{k|k-1} V_{\zeta;k-1|k-1}}_{V_{\zeta;k|k-1}} + \zeta_{M,k}\zeta'_{M,k} + R_{\zeta;k}, \tag{28}$$

kde $R_{\zeta;k}$ je submatice vnořená v prvních p řádcích a sloupcích matice R_k a $V_{\zeta;k|k} = P^{-1}_{\zeta;k|k}$.

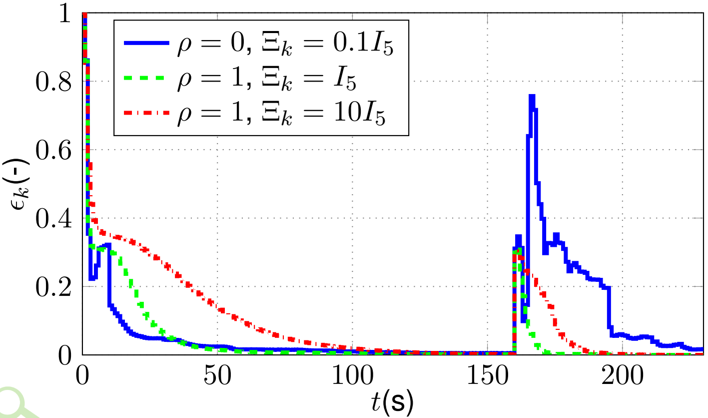
Výsledky simulace

CEITEC

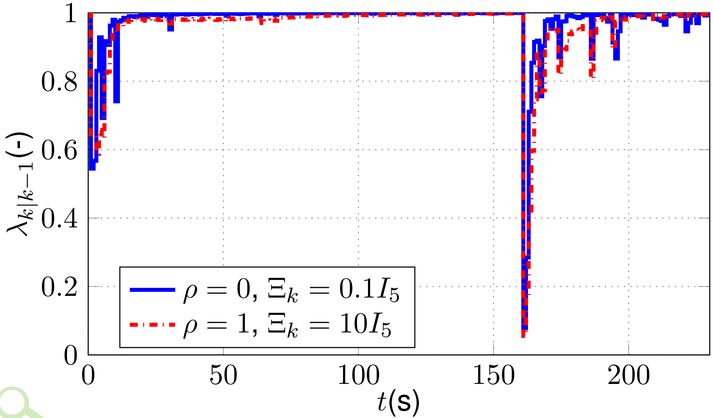
Sledování náhle změny parametrů - Hammersteinuv model

- $y_k = -ay_{k-1} + \eta_1 u_{k-1} b + \eta_2 u_{k-1}^2 b + \eta_3 u_{k-1}^3 b + \varsigma + e_k$;
- $\theta_k = [a, \varsigma, \eta_1, \eta_2, \eta_3]'$ protože $b = 1 + a$;
- $\epsilon_k \equiv ||\theta_k - \hat{\theta}_{k|k}||_2^2 ||\theta_k||_2^{-2}$ je kritériem kvality odhadování;
- $e_k \sim \mathcal{N}\left(0, 10^{-4}\right)$ a vstup u_k je rovnoměrně rozdělený na intervalu $[-2, 2]$;
- perioda vzorkování 1 s.

Výsledky simulace



Výsledky simulace

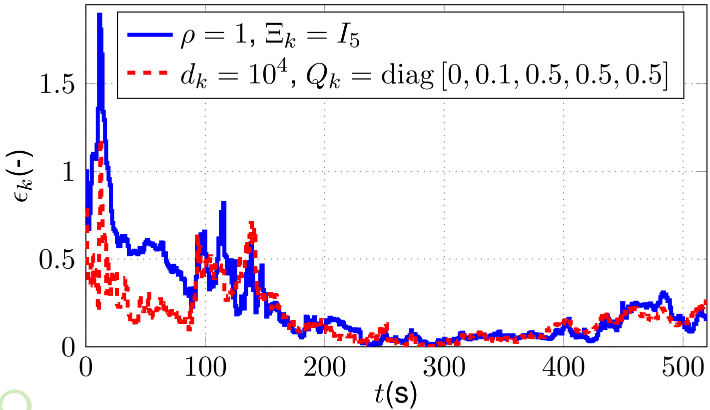


Výsledky simulace

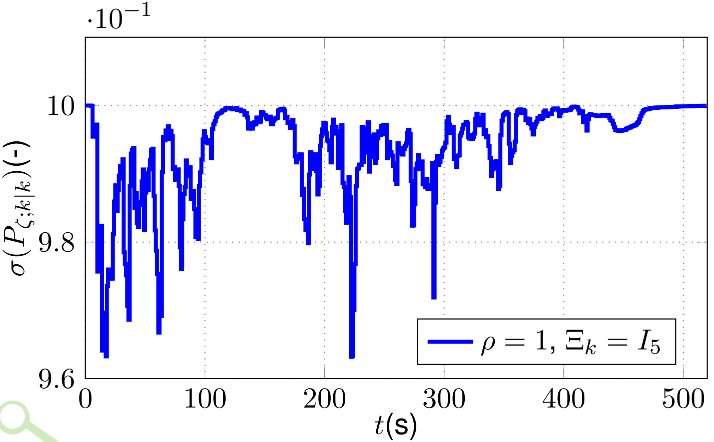
Sledování náhodné procházky parametrů - Hammersteinuv model

- $\theta_{k+1} = \theta_k + \bar{w}_k$, kde $\bar{w}_k \sim \mathcal{N}\big(0, \mathrm{diag}[0, 0.1, 0.5, 0.5, 0.5]\big)$.

Výsledky simulace



Výsledky simulace



Literatura

V. Peterka, “Bayesian approach to system identification,“ in *Trends and Progress in System Identification*, P. Eykhoff, Ed. Oxford, U.K.: Pergamon, 1981, pp. 239–304.

J. Dokoupil, A. Voda, and P. Václavek, “Regularized extended estimation with stabilized exponential forgetting,“ *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 62, no. 12, pp. 6513–6520, Dec. 2017.