CZECH TECHNICAL UNIVERSITY IN PRAGUE

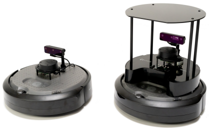
Robotika: Reprezentace pohybu

Vladimír Petrík

vladimir.petrik@cvut.cz

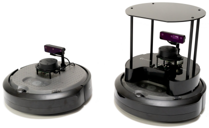
25.09.2023

Co je to robot?



Mobilní robot, UGV -
unmanned ground vehicle

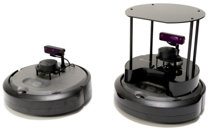
Co je to robot?



Mobilní robot, UGV - unmanned ground vehicle

Létající roboti (např. drony)

Co je to robot?



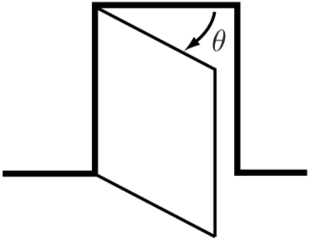
Mobilní robot, UGV - unmanned ground vehicle

Létající roboti (např. drony)

Manipulátory (např. Franka Emika Panda)

Konfigurace robota

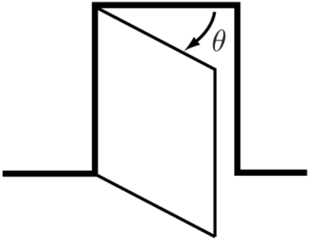
- Kompletní specifikace každého bodu na robotovi.



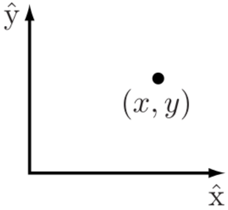
Konfigurace je popsána úhlem θ.

Konfigurace robota

- Kompletní specifikace každého bodu na robotovi.



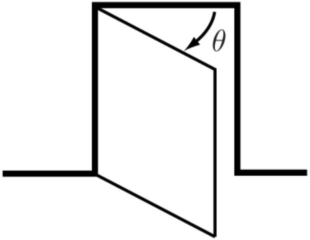
Konfigurace je popsána úhlem θ.



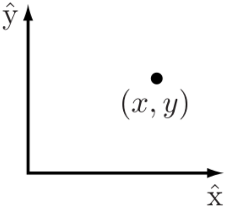
Bod v rovině je popsán dvěma souřadnicemi.

Konfigurace robota

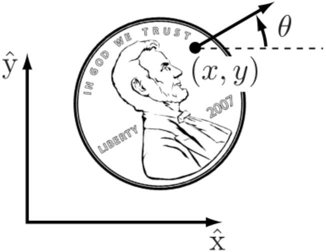
- Kompletní specifikace každého bodu na robotovi.



Konfigurace je popsána úhlem θ.



Bod v rovině je popsán dvěma souřadnicemi.



Konfigurace planárního tuhého tělesa se skládá z pozice a orientace.

Stupně volnosti (DoF)

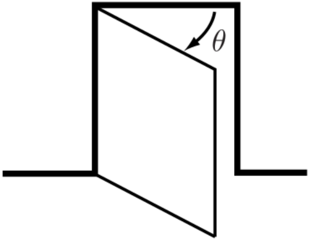
- Minimální počet souřadnic potřebných k reprezentaci konfigurace.
  - dveře: 1
  - bod v rovině: 2
  - tuhé těleso v rovině: 3
  - manipulátory: od 1 (např. rotační stůl) do desítek (humanoidi)

Stupně volnosti (DoF)

- Minimální počet souřadnic potřebných k reprezentaci konfigurace.
  - dveře: 1
  - bod v rovině: 2
  - tuhé těleso v rovině: 3
  - manipulátory: od 1 (např. rotační stůl) do desítek (humanoidi)
- Určení DoF
  - (součet volností bodů) - (počet nezávislých omezení)
  - Tuhé těleso
    - Vzdálenost mezi libovolnými dvěma danými body na tuhém tělese zůstává konstantní
    - Příklad: omezení pro N bodů rovinného tuhého objektu
  - U některých robotů je určení počtu stupňů volnosti netriviální

Konfigurační prostor - $\mathcal{C}$

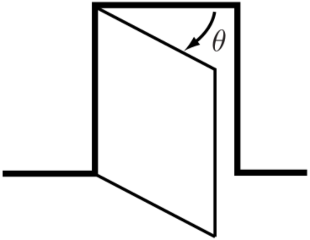
- N-rozměrný prostor (N odpovídá počtu stupňů volnosti)
- Každý bod konfiguračního prostoru odpovídá jedné konfiguraci
- Obsahuje všechny možné konfigurace robota



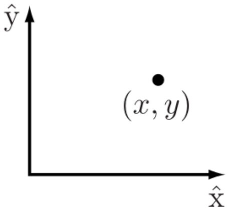
$\mathcal{C}:\langle 0^\circ, 180^\circ\rangle$ nebo
$\mathcal{C}:\langle -180^\circ, 180^\circ\rangle$

Konfigurační prostor - $\mathcal{C}$

- N-rozměrný prostor (N odpovídá počtu stupňů volnosti)
- Každý bod konfiguračního prostoru odpovídá jedné konfiguraci
- Obsahuje všechny možné konfigurace robota



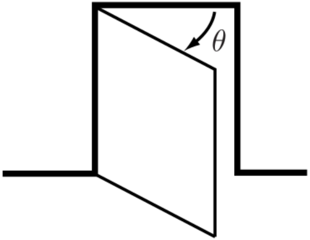
$\mathcal{C} : \langle 0°, 180° \rangle$ nebo
$\mathcal{C} : \langle -180°, 180° \rangle$



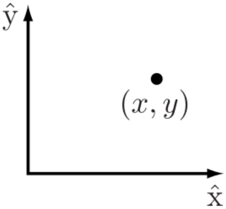
$\mathcal{C} : \mathbb{R}^2$

Konfigurační prostor - $\mathcal{C}$

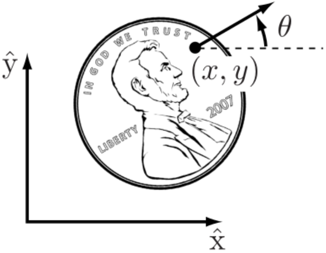
- N-rozměrný prostor (N odpovídá počtu stupňů volnosti)
- Každý bod konfiguračního prostoru odpovídá jedné konfiguraci
- Obsahuje všechny možné konfigurace robota



$\mathcal{C}: \langle 0°, 180° \rangle$ nebo
$\mathcal{C}: \langle -180°, 180° \rangle$

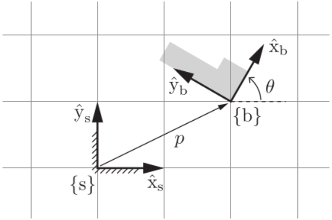


$\mathcal{C}: \mathbb{R}^2$



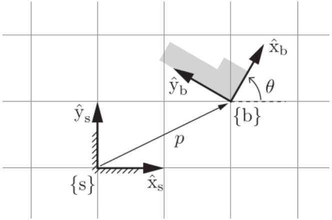
$\mathcal{C}: \mathbb{R}^2 \times \langle 0°, 360°)$

Pohyb tuhého tělesa v rovině



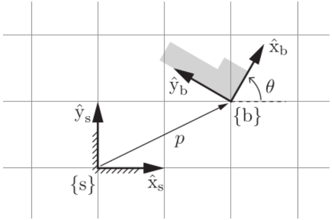
- K tuhému tělu připevníme s.s. (frame) {b}
  - Často se umisťuje do těžiště (ale není vyžadováno)
  - Lze umístit mimo tělo
  - S.s. {b} se nepohybuje vzhledem k tělu

Pohyb tuhého tělesa v rovině

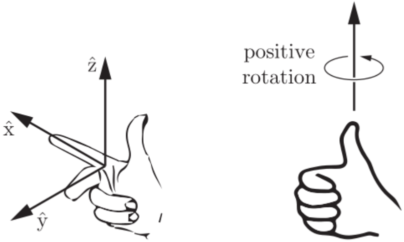


- K tuhému tělu připevníme s.s. (frame) {b}
  - Často se umisťuje do těžiště (ale není vyžadováno)
  - Lze umístit mimo tělo
  - S.s. {b} se nepohybuje vzhledem k tělu
- Vybereme pevný **referenční** s.s.
  - střed místnosti
  - roh stolu
  - základna manipulátoru

Pohyb tuhého tělesa v rovině

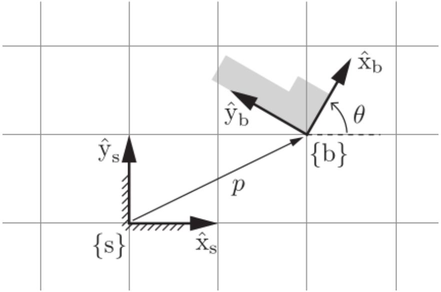


- K tuhému tělu připevníme s.s. (frame) {b}
  - Často se umisťuje do těžiště (ale není vyžadováno)
  - Lze umístit mimo tělo
  - S.s. {b} se nepohybuje vzhledem k tělu
- Vybereme pevný **referenční** s.s.
  - střed místnosti
  - roh stolu
  - základna manipulátoru
- Všechny s.s. jsou pravotočivé

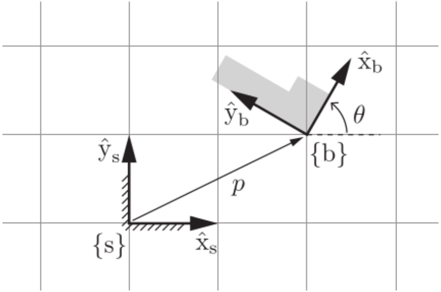


Pohyb tuhého tělesa v rovině

- Konfigurace objektu je určena
  - pozicí s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
  - orientací s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.

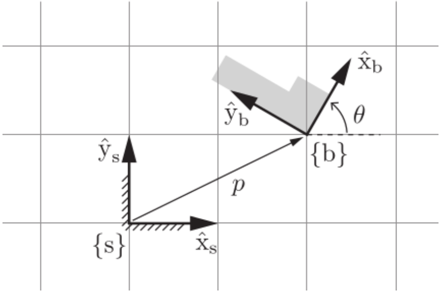


Pohyb tuhého tělesa v rovině



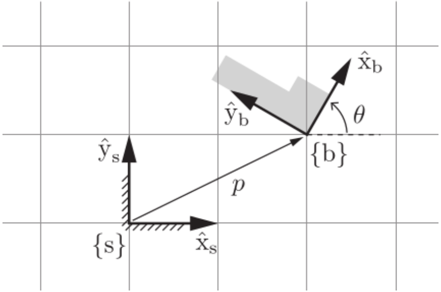
- Konfigurace objektu je určena
  - pozicí s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
  - orientací s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
- Pozice s.s. objektu
  - $\boldsymbol{p} = p_x \hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{s}} + p_y \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{R}^2$
  - Pokud je referenční s.s. jasný z kontextu: $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)^\top$

Pohyb tuhého tělesa v rovině



- Konfigurace objektu je určena
  - pozicí s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
  - orientací s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
- Pozice s.s. objektu
  - $\boldsymbol{p} = p_x \hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{s}} + p_y \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{R}^2$
  - Pokud je referenční s.s. jasný z kontextu: $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)^\top$
- Orientace
  - Úhel $\theta \in \langle 0°, 360°)$

Pohyb tuhého tělesa v rovině



- Konfigurace objektu je určena
  - pozicí s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
  - orientací s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
- Pozice s.s. objektu
  - $\boldsymbol{p} = p_x \hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{s}} + p_y \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{R}^2$
  - Pokud je referenční s.s. jasný z kontextu: $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)^\top$
- Orientace
  - Úhel $\theta \in \langle 0°, 360°)$
  - Vhodné pro další výpočty:

    $\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{b}} = +\cos\theta \hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{s}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{s}}$

    $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{b}} = -\sin\theta \hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{s}} + \cos\theta \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{s}}$

    Rotační matice $R = (\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{b}}, \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{b}}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$SO(2)$

- R má 4 čísla, ale pouze 1 DoF - 3 nezávislá omezení
  - oba sloupce jsou jednotkové vektory
  - sloupce jsou navzájem ortogonální

$SO(2)$

- R má 4 čísla, ale pouze 1 DoF - 3 nezávislá omezení
  - oba sloupce jsou jednotkové vektory
  - sloupce jsou navzájem ortogonální
- Množina všech rotačních matic je $SO(2)$, tzn. $R \in SO(2)$
  - Special Orthogonal group
  - $\det(R) = 1$
  - $RR^\top = I$, *i.e.* $R^{-1} = R^\top$
  - $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$
  - $R_1 R_2 ? = ? R_2 R_1$

$SO(2)$

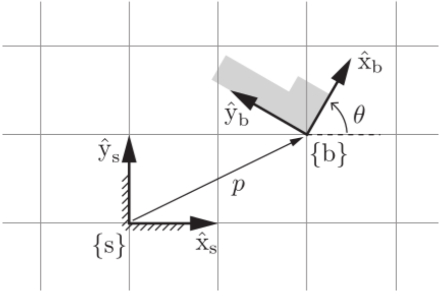
- R má 4 čísla, ale pouze 1 DoF - 3 nezávislá omezení
  - oba sloupce jsou jednotkové vektory
  - sloupce jsou navzájem ortogonální
- Množina všech rotačních matic je $SO(2)$, tzn. $R \in SO(2)$
  - Special Orthogonal group
  - $\det(R) = 1$
  - $RR^\top = I$, *i.e.* $R^{-1} = R^\top$
  - $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$
  - **Pro $SO(2)$** $R_1 R_2 = R_2 R_1$

$SO(2)$

- R má 4 čísla, ale pouze 1 DoF - 3 nezávislá omezení
  - oba sloupce jsou jednotkové vektory
  - sloupce jsou navzájem ortogonální
- Množina všech rotačních matic je $SO(2)$, tzn. $R \in SO(2)$
  - Special Orthogonal group
  - $\det(R) = 1$
  - $RR^\top = I$, *i.e.* $R^{-1} = R^\top$
  - $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$
  - **Pro** $SO(2)$ $R_1 R_2 = R_2 R_1$
- Použití rotační matice
  - pro reprezentaci orientace s.s.
  - pro změnu referenčního s.s., ve kterém je vektor reprezentován
  - pro otočení vektoru nebo s.s.

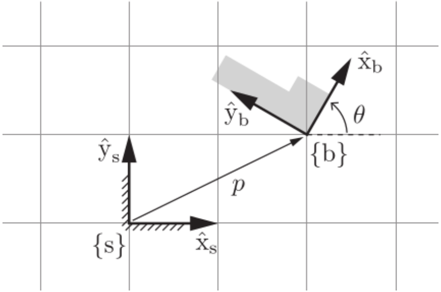
$SE(2)$

- Pár $(R_{ab}, \boldsymbol{p})$
  - reprezentuje konfiguraci objektu



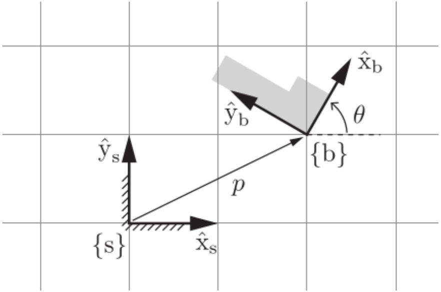
$SE(2)$

- Pár $(R_{ab}, \boldsymbol{p})$
  - reprezentuje konfiguraci objektu
  - mění referenční s.s. vektoru
    $\boldsymbol{v}_a = R_{ab}\boldsymbol{v}_b + \boldsymbol{p}$

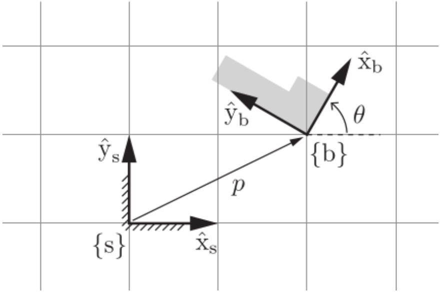


$SE(2)$

- Pár $(R_{ab}, \boldsymbol{p})$
  - reprezentuje konfiguraci objektu
  - mění referenční s.s. vektoru
    $\boldsymbol{v}_a = R_{ab}\boldsymbol{v}_b + \boldsymbol{p}$
  - posouvá vektor/s.s. $(R, \boldsymbol{t})$
    $\boldsymbol{R}_{\text{moved}} = R_{ab}R \quad \boldsymbol{t}_{\text{moved}} = R_{ab}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{p}$

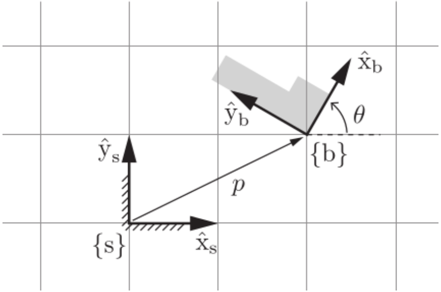


$SE(2)$



- Pár $(R_{ab}, \boldsymbol{p})$
  - reprezentuje konfiguraci objektu
  - mění referenční s.s. vektoru
    $\boldsymbol{v}_a = R_{ab}\boldsymbol{v}_b + \boldsymbol{p}$
  - posouvá vektor/s.s. $(R, \boldsymbol{t})$
    $\boldsymbol{R}_{\text{moved}} = R_{ab}R \quad \boldsymbol{t}_{\text{moved}} = R_{ab}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{p}$
- Případně v homogenních souřadnicích $T_{ab} = \begin{pmatrix} R_{ab} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \in SE(2)$
  - Special Euclidean Group
  - reprezentuje translaci i rotaci v jedné matici
  - $\boldsymbol{v}_a^H = T_{ab}\boldsymbol{v}_b^H$
  - $(T_1T_2)\,T_3 = T_1\,(T_2T_3)$
  - $T_1T_2 \neq T_2T_1$

$SE(2)$

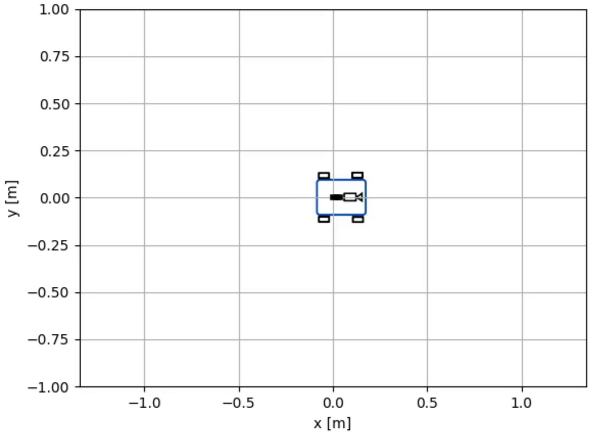


- Pár $(R_{ab}, \boldsymbol{p})$
  - reprezentuje konfiguraci objektu
  - mění referenční s.s. vektoru
    $\boldsymbol{v}_a = R_{ab}\boldsymbol{v}_b + \boldsymbol{p}$
  - posouvá vektor/s.s. $(R, \boldsymbol{t})$
    $\boldsymbol{R}_{\text{moved}} = R_{ab}R \quad \boldsymbol{t}_{\text{moved}} = R_{ab}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{p}$
- Případně v homogenních souřadnicích $T_{ab} = \begin{pmatrix} R_{ab} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \in SE(2)$
  - Special Euclidean Group
  - reprezentuje translaci i rotaci v jedné matici
  - $\boldsymbol{v}_a^H = T_{ab}\boldsymbol{v}_b^H$
  - $(T_1T_2)\,T_3 = T_1\,(T_2T_3)$
  - $T_1T_2 \neq T_2T_1$
  - Inverze T^{-1}
    - výpočet inverze matice je výpočetně náročný
    - $T^{-1} = \begin{pmatrix} R^\top & -R^\top\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$

$SE(2)$ příklad

$$T_{\text{next}} = T_{\text{current}} T_x(\delta_x) \qquad T_{\text{next}} = T_{\text{current}} T_\theta(\delta_\theta) \qquad T_{\text{next}} = T_{\text{current}} T_x(\delta_x)$$

Delta transformace jsou definovány v s.s. robota.



$SE(2)$ příklad

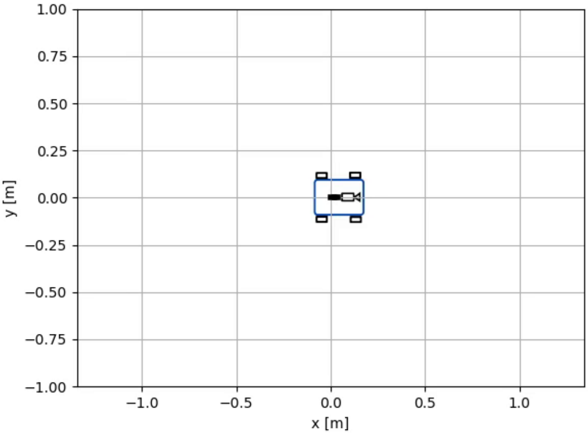
$$T_{\text{next}} = T_x(\delta_x)T_{\text{current}} \qquad T_{\text{next}} = T_\theta(\delta_\theta)T_{\text{current}} \qquad T_{\text{next}} = T_x(\delta_x)T_{\text{current}}$$

Delta transformace jsou definovány v referenčním s.s.

$SE(2)$ příklad

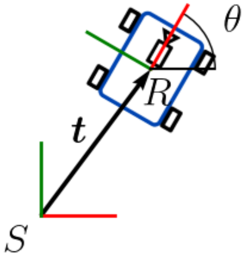
$$T_{\text{next}} = T_x(\delta_x)T_{\text{current}} \qquad T_{\text{next}} = T_\theta(\delta_\theta)T_{\text{current}} \qquad T_{\text{next}} = T_x(\delta_x)T_{\text{current}}$$

Delta transformace jsou definovány v referenčním s.s.



$SE(2)$ příklad kamera

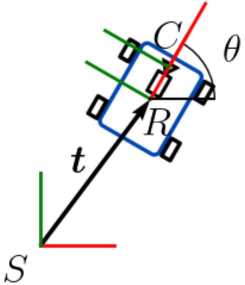
$$T_{SR} = \begin{pmatrix} R(\theta) & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$



$SE(2)$ příklad kamera

$$T_{SR} = \begin{pmatrix} R(\theta) & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

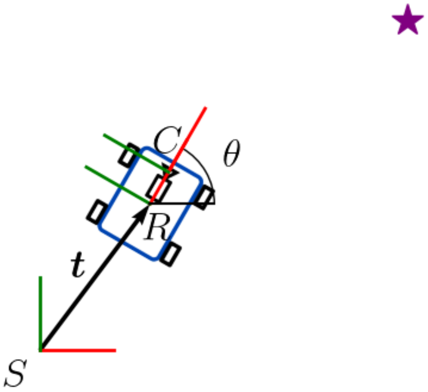
$$T_{RC} = \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \end{pmatrix}^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$



$SE(2)$ příklad kamera

$$T_{SR} = \begin{pmatrix} R(\theta) & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

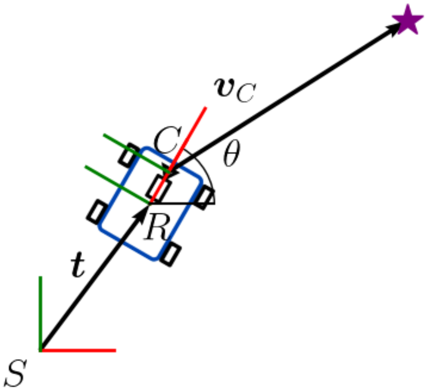
$$T_{RC} = \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \end{pmatrix}^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$



$SE(2)$ příklad kamera

$$T_{SR} = \begin{pmatrix} R(\theta) & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{RC} = \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \end{pmatrix}^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

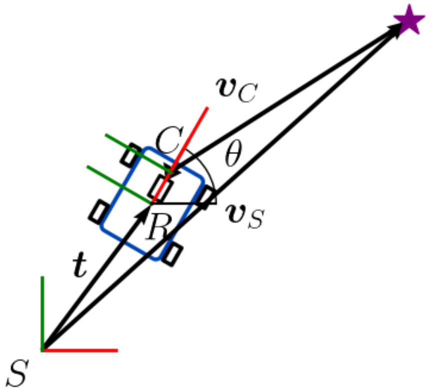


$SE(2)$ příklad kamera

$$T_{SR} = \begin{pmatrix} R(\theta) & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{RC} = \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \end{pmatrix}^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

Jak spočítat $\boldsymbol{v}_S$?



$SE(2)$ příklad kamera

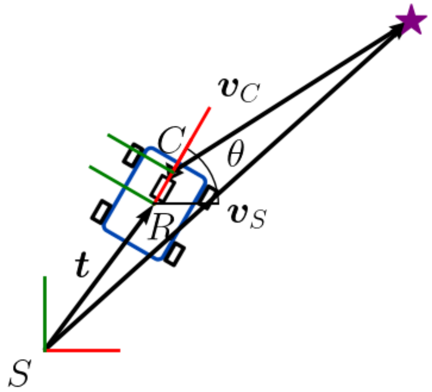
$$T_{SR} = \begin{pmatrix} R(\theta) & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{RC} = \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \end{pmatrix}^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

Jak spočítat $\boldsymbol{v}_S$?

$$T_{SC} = T_{SR} T_{RC}$$

$$\boldsymbol{v}_S = T_{SC} \boldsymbol{v}_C$$



Rozšíření do $SO(3)$ a $SE(3)$

- $SO(3)$
  - $\det(R) = 1$
  - $RR^\top = I$, *i.e.* $R^{-1} = R^\top$
  - $(R_1 R_2)\, R_3 = R_1\, (R_2 R_3)$
  - $R_1 R_2 ? = ? R_2 R_1$

Rozšíření do $SO(3)$ a $SE(3)$

- $SO(3)$
  - $\det(R) = 1$
  - $RR^\top = I$, i.e. $R^{-1} = R^\top$
  - $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$
  - $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$ obecně

Rozšíření do $SO(3)$ a $SE(3)$

- $SO(3)$
  - $\det(R) = 1$
  - $RR^\top = I$, *i.e.* $R^{-1} = R^\top$
  - $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$
  - $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$ obecně
- $SE(3)$
  - $\boldsymbol{v}_a^H = T_{ab} \boldsymbol{v}_b^H$
  - $(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$
  - $T_1 T_2 \neq T_2 T_1$
  - $T^{-1} = \begin{pmatrix} R^\top & -R^\top \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$

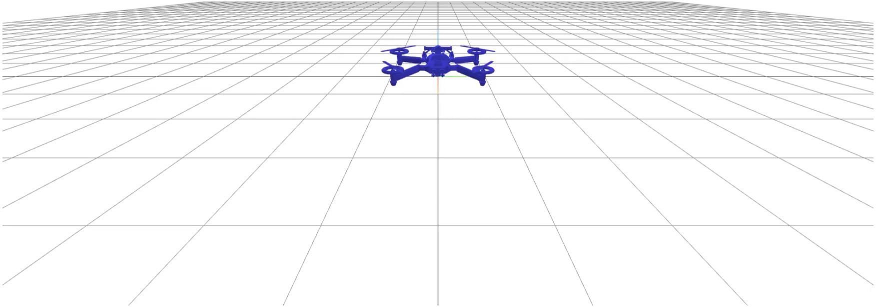
Jak spočítat $R \in SO(3)$?

- Skládání rotací kolem os x, y, z
  - $R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
  - $R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$
  - $R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Z jiných reprezentací rotací

Příklad $SE(3)$

$$T_{\text{next}} = TT_z(\delta_z) \qquad T_{\text{next}} = TR_z(\theta_z) \qquad T_{\text{next}} = TR_y(\theta_y) \qquad T_{\text{next}} = TT_x(\delta_x)$$

$R_y, R_z \in SE(3)$**!**



Reprezentace osa-úhel

- $\theta \in \mathbb{R}, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\hat{\boldsymbol{\omega}}\| = 1$

Reprezentace osa-úhel

- $\theta \in \mathbb{R}, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\hat{\boldsymbol{\omega}}\| = 1$
- Osa-úhel na R
  - Rodriguesův vzorec $R(\hat{\boldsymbol{\omega}}, \theta) = I + \sin\theta\,[\hat{\boldsymbol{\omega}}] + (1 - \cos\theta)\,[\hat{\boldsymbol{\omega}}]^2$
  - Skew-symmetric matice $[\boldsymbol{\omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$
  - Příklad: spočítejte R_z

Reprezentace osa-úhel

- $\theta \in \mathbb{R}, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\hat{\boldsymbol{\omega}}\| = 1$
- Osa-úhel na R
  - Rodriguesův vzorec $R(\hat{\boldsymbol{\omega}}, \theta) = I + \sin\theta\,[\hat{\boldsymbol{\omega}}] + (1 - \cos\theta)\,[\hat{\boldsymbol{\omega}}]^2$
  - Skew-symmetric matice $[\boldsymbol{\omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$
  - Příklad: spočítejte R_z
- Algoritmus osa-úhel z R
  - Pokud $R = I$ pak $\theta = 0$ a $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ nedefinována.

Reprezentace osa-úhel

- $\theta \in \mathbb{R}, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\hat{\boldsymbol{\omega}}\| = 1$
- Osa-úhel na R
  - Rodriguesův vzorec $R(\hat{\boldsymbol{\omega}}, \theta) = I + \sin\theta\,[\hat{\boldsymbol{\omega}}] + (1 - \cos\theta)\,[\hat{\boldsymbol{\omega}}]^2$
  - Skew-symmetric matice $[\boldsymbol{\omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$
  - Příklad: spočítejte R_z
- Algoritmus osa-úhel z R
  - Pokud $R = I$ pak $\theta = 0$ a $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ nedefinována.
  - Pokud $\operatorname{tr} R = -1$ pak $\theta = \pi$ a
    - $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{33})}} \begin{pmatrix} r_{13} & r_{23} & 1 + r_{33} \end{pmatrix}^\top$ pokud $r_{33} \neq -1$
    - $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{22})}} \begin{pmatrix} r_{12} & 1 + r_{22} & r_{32} \end{pmatrix}^\top$ pokud $r_{22} \neq -1$
    - $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{11})}} \begin{pmatrix} 1 + r_{11} & r_{21} & r_{31} \end{pmatrix}^\top$ pokud $r_{11} \neq -1$

Reprezentace osa-úhel

- $\theta \in \mathbb{R}, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\hat{\boldsymbol{\omega}}\| = 1$
- Osa-úhel na R
  - Rodriguesův vzorec $R(\hat{\boldsymbol{\omega}}, \theta) = I + \sin\theta\,[\hat{\boldsymbol{\omega}}] + (1 - \cos\theta)\,[\hat{\boldsymbol{\omega}}]^2$
  - Skew-symmetric matice $[\boldsymbol{\omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$
  - Příklad: spočítejte R_z
- Algoritmus osa-úhel z R
  - Pokud $R = I$ pak $\theta = 0$ a $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ nedefinována.
  - Pokud $\operatorname{tr} R = -1$ pak $\theta = \pi$ a
    - $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{33})}} \begin{pmatrix} r_{13} & r_{23} & 1 + r_{33} \end{pmatrix}^\top$ pokud $r_{33} \neq -1$
    - $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{22})}} \begin{pmatrix} r_{12} & 1 + r_{22} & r_{32} \end{pmatrix}^\top$ pokud $r_{22} \neq -1$
    - $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{11})}} \begin{pmatrix} 1 + r_{11} & r_{21} & r_{31} \end{pmatrix}^\top$ pokud $r_{11} \neq -1$
  - Jinak $\theta = \arccos\left(1/2\,(\operatorname{tr} R - 1)\right)$ a $[\hat{\boldsymbol{\omega}}] = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^\top)$

Exponenciální souřadnice

- Vektor $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$
- Také se nazývá Eulerův vektor nebo Euler-Rodriguesovy parametry
- Mapování na reprezentaci osa-úhel:
  - $\theta = \|\boldsymbol{\omega}\|$
  - $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\theta}$

Exponenciální souřadnice

- Vektor $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$
- Také se nazývá Eulerův vektor nebo Euler-Rodriguesovy parametry
- Mapování na reprezentaci osa-úhel:
  - $\theta = \|\boldsymbol{\omega}\|$
  - $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\theta}$
- Exponenciální souřadnice na/z R
  - $R = \exp \boldsymbol{\omega}$: použit Rodriguesův vzorec
  - $\boldsymbol{\omega} = \log R$: použit algoritmus osa-úhel z R

Exponenciální souřadnice

- Vektor $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$
- Také se nazývá Eulerův vektor nebo Euler-Rodriguesovy parametry
- Mapování na reprezentaci osa-úhel:
  - $\theta = \|\boldsymbol{\omega}\|$
  - $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\theta}$
- Exponenciální souřadnice na/z R
  - $R = \exp \boldsymbol{\omega}$: použit Rodriguesův vzorec
  - $\boldsymbol{\omega} = \log R$: použit algoritmus osa-úhel z R
- Proč exponenciální?
  - odpovídá exponenciále/logaritmu matice $[\boldsymbol{\omega}]$
  - pokud $\boldsymbol{\omega}$ je úhlová rychlost, její integrace pro jednu časovou jednotku vede na exponenciálu a konečná orientace je R
  - numericky citlivá reprezentace pro malé úhly

Kvaterniony

- $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^4, \quad \|\boldsymbol{q}\| = 1$
- Z osa-úhel
  - $q_w = \cos\left(\theta/2\right)$
  - $\boldsymbol{q}_{xyz} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \sin\left(\theta/2\right)$

Kvaterniony

- $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^4, \quad \|\boldsymbol{q}\| = 1$
- Z osa-úhel
  - $q_w = \cos(\theta/2)$
  - $\boldsymbol{q}_{xyz} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \sin(\theta/2)$
- Z R
  - $q_w = 1/2\sqrt{1 + \operatorname{tr} R}$
  - $\boldsymbol{q}_{xyz} = \frac{1}{4q_w} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} & r_{13} - r_{31} & r_{21} - r_{12} \end{pmatrix}^\top$

Kvaterniony

- $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^4, \quad \|\boldsymbol{q}\| = 1$
- Z osa-úhel
  - $q_w = \cos(\theta/2)$
  - $\boldsymbol{q}_{xyz} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \sin(\theta/2)$
- Z R
  - $q_w = 1/2\sqrt{1 + \operatorname{tr} R}$
  - $\boldsymbol{q}_{xyz} = \frac{1}{4q_w} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} & r_{13} - r_{31} & r_{21} - r_{12} \end{pmatrix}^\top$
- Do R
  - $R = \exp\left(2 \arccos(q_w) \frac{\boldsymbol{q}_{xyz}}{\|\boldsymbol{q}_{xyz}\|}\right)$
  - tzn. rotuj kolem $\boldsymbol{q}_{xyz}$ o $\theta = 2 \arccos(q_w)$

Kvaterniony

- $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^4, \quad \|\boldsymbol{q}\| = 1$
- Z osa-úhel
  - $q_w = \cos(\theta/2)$
  - $\boldsymbol{q}_{xyz} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \sin(\theta/2)$
- Z R
  - $q_w = 1/2\sqrt{1 + \operatorname{tr} R}$
  - $\boldsymbol{q}_{xyz} = \frac{1}{4q_w}\begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} & r_{13} - r_{31} & r_{21} - r_{12} \end{pmatrix}^\top$
- Do R
  - $R = \exp\left(2 \arccos(q_w) \frac{\boldsymbol{q}_{xyz}}{\|\boldsymbol{q}_{xyz}\|}\right)$
  - tzn. rotuj kolem $\boldsymbol{q}_{xyz}$ o $\theta = 2 \arccos(q_w)$
- Kvaterniony nejsou jedinečné, dvě řešení pro stejné R
- Numericky stabilní

Další reprezentace

- Eulerovy úhly
  - tři čísla $\theta_1, \theta_2, \theta_3$
  - rotace kolem os x, y, nebo z
  - např. XYX Eulerovy úhly odpovídají $R = R_x(\theta_1)R_y(\theta_2)R_x(\theta_3)$
  - výpočet Eulerových úhlů z R je často numericky nestabilní a vyžaduje speciální algoritmus pro každou trojici os

Další reprezentace

- Eulerovy úhly
  - tři čísla $\theta_1, \theta_2, \theta_3$
  - rotace kolem os x, y, nebo z
  - např. XYX Eulerovy úhly odpovídají $R = R_x(\theta_1)R_y(\theta_2)R_x(\theta_3)$
  - výpočet Eulerových úhlů z R je často numericky nestabilní a vyžaduje speciální algoritmus pro každou trojici os
- 6D reprezentace rotace
  - reprezentované prvními dvěma sloupci R
  - hladká reprezentace
  - používá se ve strojovém učení (např. výstup neuronové sítě)

Shrnutí

- Konfigurace, Konfigurační prostor $\mathcal{C}$, DoF
- Rovinný pohyb tuhého tělesa $SO(2)$, $SE(2)$
- Prostorový pohyb tuhého tělesa $SO(3)$, $SE(3)$
- Vlastnosti rotační matice v $SO(2)$ a $SO(3)$
- Reprezentace prostorových rotací
  - rotační matice
  - osa-úhel
  - exponenciální souřadnice
  - kvaterniony
  - Eulerovy úhly
  - 6D reprezentace

Cíl cvičení

- Začneme implementovat sadu nástrojů pro robotiku
- Nástroje pro práci s $SO(2)$, $SE(2)$, $SO(3)$, $SE(3)$
  - $\exp(\boldsymbol{\omega})$
  - $\log(R)$
  - R^{-1}
  - $\dots$

Cíl cvičení

- Začneme implementovat sadu nástrojů pro robotiku
- Nástroje pro práci s $SO(2)$, $SE(2)$, $SO(3)$, $SE(3)$
  - $\exp(\boldsymbol{\omega})$
  - $\log(R)$
  - R^{-1}
  - $\ldots$
- Příprava
  - Doporučuje se Linux a Conda
  - Nainstalujte Condu
  - Nainstalujte Python IDE (PyCharm, VSCode)