CZECH TECHNICAL UNIVERSITY IN PRAGUE

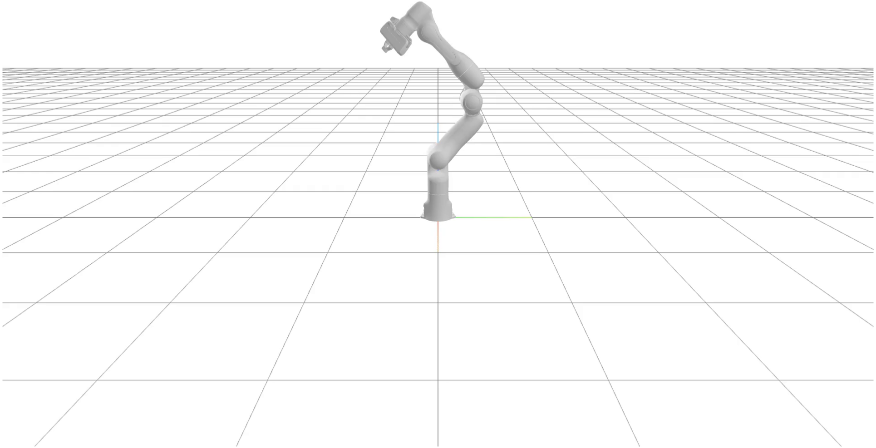
Robotika: Diferenciální Kinematika a Statika

Vladimír Petrík

vladimir.petrik@cvut.cz

09.10.2023

Motivace



Diferenciální Kinematika

- Víme, jak vypočítat pozici chapadla z konfigurace
  - přímá kinematika (FK)
  - $\boldsymbol{x}(t) = f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q}(t))$
  - $\boldsymbol{x}(t)$ je vyjádřena v úkolovém prostoru, tzn. $SE(2)$, $SE(3)$, nebo $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ pouze pro pozici
  - $\boldsymbol{q}(t) \in \mathbb{R}^N$ je konfigurace (prostor kloubu)
  - t je čas

Diferenciální Kinematika

- Víme, jak vypočítat pozici chapadla z konfigurace
  - příma kinematika (FK)
  - $\boldsymbol{x}(t) = f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q}(t))$
  - $\boldsymbol{x}(t)$ je vyjádřena v úkolovém prostoru, tzn. $SE(2)$, $SE(3)$, nebo $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ pouze pro pozici
  - $\boldsymbol{q}(t) \in \mathbb{R}^N$ je konfigurace (prostor kloubu)
  - t je čas
- Diferenciální kinematika
  - dává do vztahu rychlost chapadla s rychlostí kloubů
  - $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \in \mathbb{R}^M$
  - Jakobián manipulátoru je základem pro analýzy tohoto vztahu

Jakobián

Přímá kinematika

$$\boldsymbol{x}(t) = f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q}(t))$$

Jakobián:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Jakobián

Přímá kinematika

$$\boldsymbol{x}(t) = f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q}(t))$$

Jakobián:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Jakobián

Přímá kinematika

$$\boldsymbol{x}(t) = f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q}(t))$$

Jakobián:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}}
\end{aligned}$$

Jakobián

Přímá kinematika

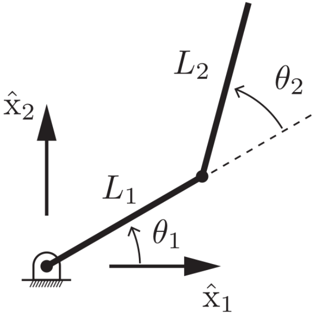
$$\boldsymbol{x}(t) = f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q}(t))$$

Jakobián:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}} \\ &= J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\end{aligned}$$

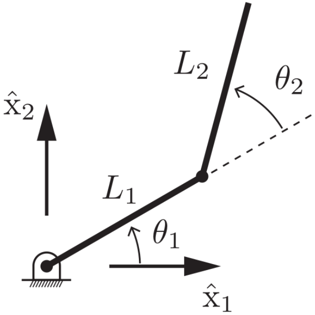
$$J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$$

Příklad planárního robota



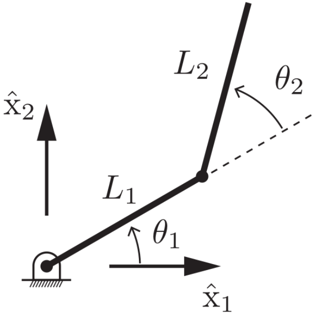
- FK: $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top \rightarrow (x, y)^\top$

Příklad planárního robota



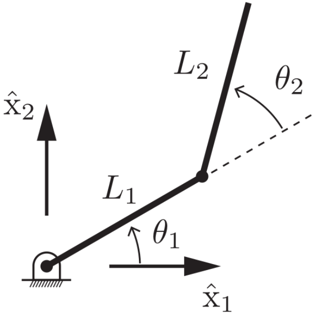
- FK: $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top \rightarrow (x, y)^\top$
  - $x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$
  - $y = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$
- $\dot{\boldsymbol{x}} = ?$

Příklad planárního robota



- FK: $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top \rightarrow (x, y)^\top$
  - $x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$
  - $y = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$
- $\dot{\boldsymbol{x}} = ?$
  - $\dot{x}_1 = -L_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)$
  - $\dot{y}_1 = L_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos(\theta_1 + \theta_2)$

Příklad planárního robota



- FK: $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top \to (x, y)^\top$
  - $x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$
  - $y = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$
- $\dot{\boldsymbol{x}} =$?
  - $\dot{x}_1 = -L_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)$
  - $\dot{y}_1 = L_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos(\theta_1 + \theta_2)$
  - $J(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} -L_1 \sin\theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$
  - Jacobián závisí na konfiguraci $\boldsymbol{q}$

Rozměr jakobiánu

- $J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
- M DoF prostoru úkolů
- N DoF konfiguračního (kloubového) prostoru

Rozměr jakobiánu

- $J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
- M DoF prostoru úkolů
- N DoF konfiguračního (kloubového) prostoru
- Redundantní roboti: $N > M$

Rozměr jakobiánu

- $J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
- M DoF prostoru úkolů
- N DoF konfiguračního (kloubového) prostoru
- Redundantní roboti: $N > M$
- Podaktuovaní roboti: $N < M$

Rozměr jakobiánu

- $J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
- M DoF prostoru úkolů
- N DoF konfiguračního (kloubového) prostoru
- Redundantní roboti: $N > M$
- Podaktuovaní roboti: $N < M$
- 2 DoF robot s translačním prostorem úkolů:

Rozměr jakobiánu

- $J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
- M DoF prostoru úkolů
- N DoF konfiguračního (kloubového) prostoru
- Redundantní roboti: $N > M$
- Podaktuovaní roboti: $N < M$
- 2 DoF robot s translačním prostorem úkolů: 2×2
- 2 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů:

Rozměr jakobiánu

- $J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
- M DoF prostoru úkolů
- N DoF konfiguračního (kloubového) prostoru
- Redundantní roboti: $N > M$
- Podaktuovaní roboti: $N < M$
- 2 DoF robot s translačním prostorem úkolů: 2×2
- 2 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů: 3×2
- 5 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů:

Rozměr jakobiánu

- $J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
- M DoF prostoru úkolů
- N DoF konfiguračního (kloubového) prostoru
- Redundantní roboti: $N > M$
- Podaktuovaní roboti: $N < M$
- 2 DoF robot s translačním prostorem úkolů: 2×2
- 2 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů: 3×2
- 5 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů: 3×5
- 6 DoF robot s $SE(3)$ prostorem úkolů:

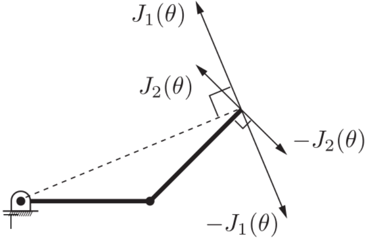
Rozměr jakobiánu

- $J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
- M DoF prostoru úkolů
- N DoF konfiguračního (kloubového) prostoru
- Redundantní roboti: $N > M$
- Podaktuovaní roboti: $N < M$
- 2 DoF robot s translačním prostorem úkolů: 2×2
- 2 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů: 3×2
- 5 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů: 3×5
- 6 DoF robot s $SE(3)$ prostorem úkolů: 6×6
- 7 DoF robot s $SE(3)$ prostorem úkolů:

Rozměr jakobiánu

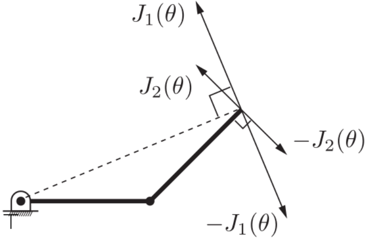
- $J(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial f_{\mathsf{fk}}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
- M DoF prostoru úkolů
- N DoF konfiguračního (kloubového) prostoru
- Redundantní roboti: $N > M$
- Podaktuovaní roboti: $N < M$
- 2 DoF robot s translačním prostorem úkolů: 2×2
- 2 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů: 3×2
- 5 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů: 3×5
- 6 DoF robot s $SE(3)$ prostorem úkolů: 6×6
- 7 DoF robot s $SE(3)$ prostorem úkolů: 6×7

Vlastnosti jakobiánu



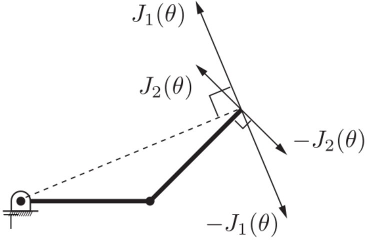
- $J(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} J_1(\boldsymbol{q}) & J_2(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix}$
- První sloupec odpovídá rychlosti chapadla pro $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$
- Druhý sloupec odpovídá rychlosti chapadla pro $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$
- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}_{\text{tip}} = J_1(\boldsymbol{q})\dot{\theta}_1 + J_2(\boldsymbol{q})\dot{\theta}_2$

Vlastnosti jakobiánu



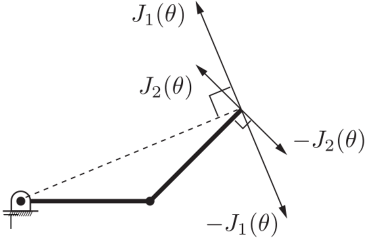
- $J(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} J_1(\boldsymbol{q}) & J_2(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix}$
- První sloupec odpovídá rychlosti chapadla pro $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$
- Druhý sloupec odpovídá rychlosti chapadla pro $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$
- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}_{\text{tip}} = J_1(\boldsymbol{q})\dot{\theta}_1 + J_2(\boldsymbol{q})\dot{\theta}_2$
- Můžeme generovat rychlost v libovolném směru, pokud $J_1(\boldsymbol{q})$ a $J_2(\boldsymbol{q})$ nejsou kolineární
  - kdy jsou kolineární?

Vlastnosti jakobiánu



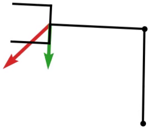
- $J(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} J_1(\boldsymbol{q}) & J_2(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix}$
- První sloupec odpovídá rychlosti chapadla pro $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$
- Druhý sloupec odpovídá rychlosti chapadla pro $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$
- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}_{\text{tip}} = J_1(\boldsymbol{q})\dot{\theta}_1 + J_2(\boldsymbol{q})\dot{\theta}_2$
- Můžeme generovat rychlost v libovolném směru, pokud $J_1(\boldsymbol{q})$ a $J_2(\boldsymbol{q})$ nejsou kolineární
  - kdy jsou kolineární?např. $\theta_2 = 0$

Vlastnosti jakobiánu



- $J(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} J_1(\boldsymbol{q}) & J_2(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix}$
- První sloupec odpovídá rychlosti chapadla pro $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$
- Druhý sloupec odpovídá rychlosti chapadla pro $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$
- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}_{\text{tip}} = J_1(\boldsymbol{q})\dot{\theta}_1 + J_2(\boldsymbol{q})\dot{\theta}_2$
- Můžeme generovat rychlost v libovolném směru, pokud $J_1(\boldsymbol{q})$ a $J_2(\boldsymbol{q})$ nejsou kolineární
  - kdy jsou kolineární?např. $\theta_2 = 0$
  - Jacobián je singulární matice $\rightarrow$ konfigurace se nazývají **singularity**
  - hodnost jakobiánů není maximální
  - chapadlo není schopno generovat rychlost v určitém směru

Vizualizace sloupců jakobiánu



Jak vypočítat jakobián numericky

- Metoda konečné diference
  - $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}, \quad \delta \to 0$

Jak vypočítat jakobián numericky

- Metoda konečné diference
  - $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}, \quad \delta \to 0$
- $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_0} & \frac{\partial x}{\partial q_1} & \dots \\ \frac{\partial y}{\partial q_0} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \dots \\ \frac{\partial \theta}{\partial q_0} & \frac{\partial \theta}{\partial q_1} & \dots \end{pmatrix}$

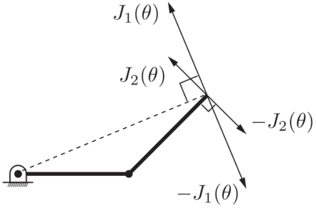
Jak vypočítat jakobián numericky

- Metoda konečné diference
  - $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}, \quad \delta \to 0$
- $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_0} & \frac{\partial x}{\partial q_1} & \dots \\ \frac{\partial y}{\partial q_0} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \dots \\ \frac{\partial \theta}{\partial q_0} & \frac{\partial \theta}{\partial q_1} & \dots \end{pmatrix}$
- $\frac{\partial x}{\partial q_0}(\boldsymbol{q}) \approx \frac{f_{\mathsf{fk,x}}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\delta})-f_{\mathsf{fk,x}}(\boldsymbol{q})}{\delta}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & \cdots \end{pmatrix}^\top$
- Opakujte pro každý prvek J

Jak vypočítat jakobián numericky

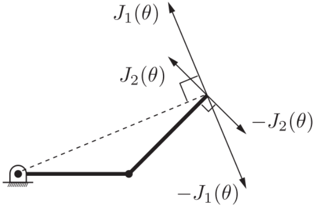
- Metoda konečné diference
  - $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}, \quad \delta \to 0$
- $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_0} & \frac{\partial x}{\partial q_1} & \cdots \\ \frac{\partial y}{\partial q_0} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \cdots \\ \frac{\partial \theta}{\partial q_0} & \frac{\partial \theta}{\partial q_1} & \cdots \end{pmatrix}$
- $\frac{\partial x}{\partial q_0}(\boldsymbol{q}) \approx \frac{f_{\mathsf{fk,x}}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\delta})-f_{\mathsf{fk,x}}(\boldsymbol{q})}{\delta}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix}\delta & 0 & \cdots\end{pmatrix}^\top$
- Opakujte pro každý prvek J
- Pomalý na výpočet, snadno implementovatelný $\rightarrow$ používán při testování

Jak vypočítat jakobián analyticky



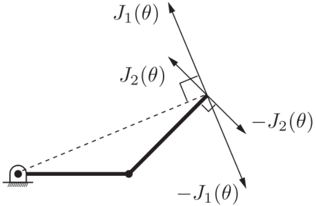
- $J = \begin{pmatrix} J_v & J_w \end{pmatrix}^\top$ tzv. translační a rotační část
- Translační část:
  - sloupec i ($\boldsymbol{n}_S$) je kolmý na vektor $\boldsymbol{t}$, který spojuje kloub i k chapadlu

Jak vypočítat jakobián analyticky



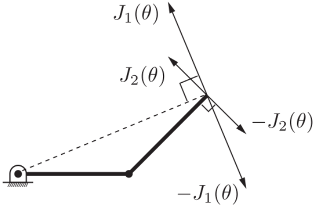
- $J = \begin{pmatrix} J_v & J_w \end{pmatrix}^\top$ tzv. translační a rotační část
- Translační část:
  - sloupec i ($\boldsymbol{n}_S$) je kolmý na vektor $\boldsymbol{t}$, který spojuje kloub i k chapadlu
  - S - referenční s.s., J - s.s. připojený ke kloubu i, E s.s. chapadla

Jak vypočítat jakobián analyticky



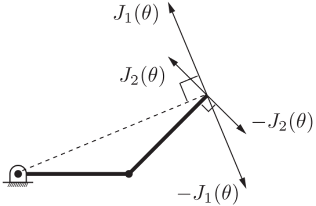
- $J = \begin{pmatrix} J_v & J_w \end{pmatrix}^\top$ tzv. translační a rotační část
- Translační část:
  - sloupec i ($\boldsymbol{n}_S$) je kolmý na vektor $\boldsymbol{t}$, který spojuje kloub i k chapadlu
  - S - referenční s.s., J - s.s. připojený ke kloubu i, E s.s. chapadla
  - $\boldsymbol{t}_{JE}$ - translační část $T_{JE} \in SE(2)$

Jak vypočítat jakobián analyticky



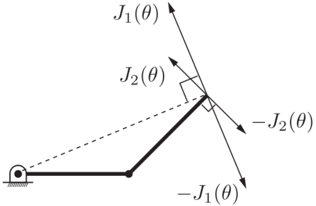
- $J = \begin{pmatrix} J_v & J_w \end{pmatrix}^\top$ tzv. translační a rotační část
- Translační část:
  - sloupec i ($\boldsymbol{n}_S$) je kolmý na vektor $\boldsymbol{t}$, který spojuje kloub i k chapadlu
  - S - referenční s.s., J - s.s. připojený ke kloubu i, E s.s. chapadla
  - $\boldsymbol{t}_{JE}$ - translační část $T_{JE} \in SE(2)$
  - $\boldsymbol{n} = R(90)\boldsymbol{t}_{JE}$ - kolmý vektor

Jak vypočítat jakobián analyticky



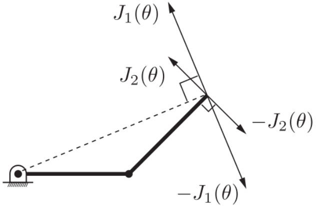
- $J = \begin{pmatrix} J_v & J_w \end{pmatrix}^\top$ tzv. translační a rotační část
- Translační část:
  - sloupec i ($\boldsymbol{n}_S$) je kolmý na vektor $\boldsymbol{t}$, který spojuje kloub i k chapadlu
  - S - referenční s.s., J - s.s. připojený ke kloubu i, E s.s. chapadla
  - $\boldsymbol{t}_{JE}$ - translační část $T_{JE} \in SE(2)$
  - $\boldsymbol{n} = R(90)\boldsymbol{t}_{JE}$ - kolmý vektor
  - $\boldsymbol{n}_S = R_{SJ}\boldsymbol{n}$ - změna referenčního s.s.

Jak vypočítat jakobián analyticky



- $J = \begin{pmatrix} J_v & J_w \end{pmatrix}^\top$ tzv. translační a rotační část
- Translační část:
  - sloupec i ($\boldsymbol{n}_S$) je kolmý na vektor $\boldsymbol{t}$, který spojuje kloub i k chapadlu
  - S - referenční s.s., J - s.s. připojený ke kloubu i, E s.s. chapadla
  - $\boldsymbol{t}_{JE}$ - translační část $T_{JE} \in SE(2)$
  - $\boldsymbol{n} = R(90)\boldsymbol{t}_{JE}$ - kolmý vektor
  - $\boldsymbol{n}_S = R_{SJ}\boldsymbol{n}$ - změna referenčního s.s.
  - pro posuvné klouby: $\boldsymbol{n}_S = R_{SJ}\boldsymbol{a}$
  - $\boldsymbol{a}$ osa translace

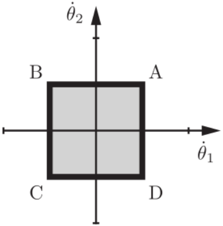
Jak vypočítat jakobián analyticky



- $J = \begin{pmatrix} J_v & J_w \end{pmatrix}^\top$ tzv. translační a rotační část
- Translační část:
  - sloupec i ($\boldsymbol{n}_S$) je kolmý na vektor $\boldsymbol{t}$, který spojuje kloub i k chapadlu
  - S - referenční s.s., J - s.s. připojený ke kloubu i, E s.s. chapadla
  - $\boldsymbol{t}_{JE}$ - translační část $T_{JE} \in SE(2)$
  - $\boldsymbol{n} = R(90)\boldsymbol{t}_{JE}$ - kolmý vektor
  - $\boldsymbol{n}_S = R_{SJ}\boldsymbol{n}$ - změna referenčního s.s.
  - pro posuvné klouby: $\boldsymbol{n}_S = R_{SJ}\boldsymbol{a}$
  - $\boldsymbol{a}$ osa translace
- Rotační část
  - 1 pro rotační klouby
  - 0 pro posuvné klouby

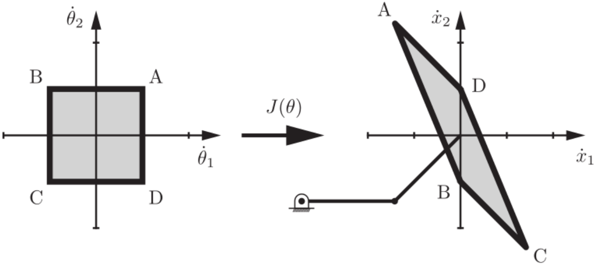
Aplikace jakobiánu - rychlostní limity

- $\dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$
- Pro každý kloub jsou uvedeny rychlostní limity
  - nezávislé na konfiguraci



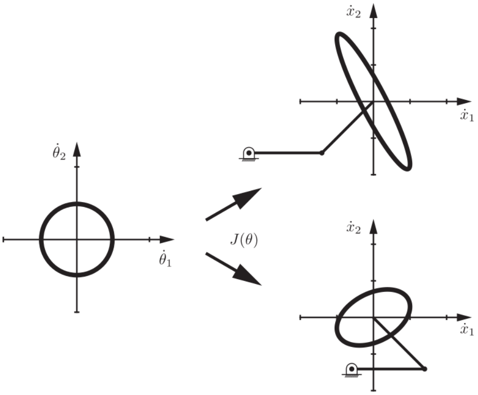
Aplikace jakobiánu - rychlostní limity

- $\dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$
- Pro každý kloub jsou uvedeny rychlostní limity
  - nezávislé na konfiguraci
- Jaké rychlosti můžeme dosáhnout s chapadlem?
  - závisí na konfiguraci
  - použijte jakobián k mapování rychlosti kloubového prostoru na rychlost v úkolovém prostoru



Elipsoid manipulovatelnosti

- Jednotková kružnice v kloubovém rychlostním prostoru, *i.e.* $\|\dot{\boldsymbol{q}}\| = 1$
- Mapování přes jakobián do elipsoidu v prostoru chapadla
- Čím blíže je elipsoid ke kouli, tím snadněji se může chapadlo pohybovat libovolným směrem



Jak vypočítat elipsoid manipulovatelnosti

$$1 = \|\dot{\boldsymbol{q}}\|$$

Jak vypočítat elipsoid manipulovatelnosti

$$
\begin{aligned}
1 &= \|\dot{\boldsymbol{q}}\| \\
&= \dot{\boldsymbol{q}}^\top \dot{\boldsymbol{q}}
\end{aligned}
$$

Jak vypočítat elipsoid manipulovatelnosti

- Pokud $J(\boldsymbol{q})$ je ne-singulární

$$
\begin{aligned}
1 &= \|\dot{\boldsymbol{q}}\| \\
&= \dot{\boldsymbol{q}}^\top \dot{\boldsymbol{q}} \\
&= \left(J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\right)^\top \left(J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\right)
\end{aligned}
$$

Jak vypočítat elipsoid manipulovatelnosti

- Pokud $J(q)$ je ne-singulární

$$
\begin{aligned}
1 &= \|\dot{\boldsymbol{q}}\| \\
&= \dot{\boldsymbol{q}}^\top \dot{\boldsymbol{q}} \\
&= \left(J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\right)^\top \left(J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\right) \\
&= \dot{\boldsymbol{x}}^\top J(\boldsymbol{q})^{-\top} J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
$$

Jak vypočítat elipsoid manipulovatelnosti

- Pokud $J(\boldsymbol{q})$ je ne-singulární

$$
\begin{aligned}
1 &= \|\dot{\boldsymbol{q}}\| \\
&= \dot{\boldsymbol{q}}^\top \dot{\boldsymbol{q}} \\
&= \left(J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\right)^\top \left(J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\right) \\
&= \dot{\boldsymbol{x}}^\top J(\boldsymbol{q})^{-\top} J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} \\
&= \dot{\boldsymbol{x}}^\top \left(J(\boldsymbol{q})J(\boldsymbol{q})^\top\right)^{-1} \dot{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
$$

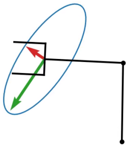
Jak vypočítat elipsoid manipulovatelnosti

- Pokud $J(\boldsymbol{q})$ je ne-singulární
- Řešením $\boldsymbol{u}^\top A^{-1}\boldsymbol{u} = 1$ je elipsoid
  - vlastní vektory A ukazují směry hlavních os elipsoidu
  - odmocniny vlastních hodnot jsou délky hlavních os

$$
\begin{aligned}
1 &= \|\dot{\boldsymbol{q}}\| \\
&= \dot{\boldsymbol{q}}^\top \dot{\boldsymbol{q}} \\
&= \left(J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\right)^\top \left(J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\right) \\
&= \dot{\boldsymbol{x}}^\top J(\boldsymbol{q})^{-\top} J(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} \\
&= \dot{\boldsymbol{x}}^\top \left(J(\boldsymbol{q})J(\boldsymbol{q})^\top\right)^{-1} \dot{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
$$

Příklad elipsoidu manipulovatelnosti

- 2 DoF robot, jenom translace, eig$(JJ^\top)$



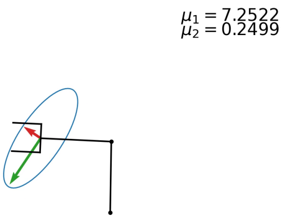
Jak blízko jsme singularitě?

- Podmíněnost matice $JJ^\top$
  - $\mu_1 = \frac{\lambda_{\max}(JJ^\top)}{\lambda_{\min}(JJ^\top)} \geq 1$
  - λ je vlastní číslo dané matice
  - čím větší je μ_1, tím blíže k singularitě jsme
  - **Preferují se malé μ_1**

Jak blízko jsme singularitě?

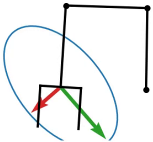
- Podmíněnost matice $JJ^\top$
  - $\mu_1 = \frac{\lambda_{\max}(JJ^\top)}{\lambda_{\min}(JJ^\top)} \geq 1$
  - λ je vlastní číslo dané matice
  - čím větší je μ_1, tím blíže k singularitě jsme
  - **Preferují se malé μ_1**
- Objem elipsoidu manipulovatelnosti
  - čím menší objem, tím blíže k singularitě jsme
  - $\mu_2 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots} = \det\left(JJ^\top\right)$
  - **Upřednostňují se velké μ_2**

Jak blízko jsme singularitě?



- Podmíněnost matice $JJ^\top$
  - $\mu_1 = \frac{\lambda_{\max}(JJ^\top)}{\lambda_{\min}(JJ^\top)} \geq 1$
  - λ je vlastní číslo dané matice
  - čím větší je μ_1, tím blíže k singularitě jsme
  - **Preferují se malé μ_1**
- Objem elipsoidu manipulovatelnosti
  - čím menší objem, tím blíže k singularitě jsme
  - $\mu_2 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots} = \det\left(JJ^\top\right)$
  - **Upřednostňují se velké μ_2**

Redundantní roboti a singularity



Nulový prostor jakobiánu [Null-space]

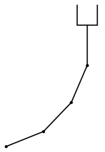
- $\mathsf{Null}(A) = \ker(A) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$

Nulový prostor jakobiánu [Null-space]

- $\mathsf{Null}(A) = \ker(A) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$
- Najdi $\dot{\boldsymbol{q}}$ tak, aby $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$
  - $\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathsf{null}} \in \ker(J)$

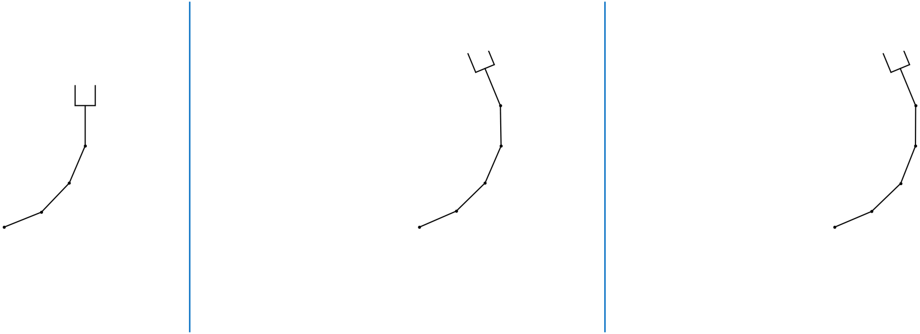
Nulový prostor jakobiánu [Null-space]

- $\mathsf{Null}(A) = \ker(A) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$
- Najdi $\dot{\boldsymbol{q}}$ tak, aby $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$
  - $\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathsf{null}} \in \ker(J)$



Nulový prostor jakobiánu [Null-space]

- $\mathrm{Null}(A) = \ker(A) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$
- Najdi $\dot{\boldsymbol{q}}$ tak, aby $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$
  - $\dot{\boldsymbol{q}}_{\text{null}} \in \ker(J)$
  - existuje více řešení, pokud máme víc stupňů volnosti



Analýza statiky

- Zachování energie: (výkon v kloubech) $=$ (výkon pro pohyb robota) $+$ (výkon v chapadle)

Analýza statiky

- Zachování energie: (výkon v kloubech) = (výkon pro pohyb robota) + (výkon v chapadle)
- Statická rovnováha: k pohybu robota se nepoužívá žádná energie, tj. žádný pohyb

Analýza statiky

- Zachování energie: (výkon v kloubech) $=$ (výkon pro pohyb robota) $+$ (výkon v chapadle)
- Statická rovnováha: k pohybu robota se nepoužívá žádná energie, tj. žádný pohyb
  - (výkon v kloubech) $=$ (výkon v chapadle)
  - $\boldsymbol{\tau}^\top \dot{\boldsymbol{q}} = F^\top \dot{\boldsymbol{x}}$
    - $\boldsymbol{\tau}$ kloubové momenty/síly
    - $\dot{\boldsymbol{q}}$ kloubové rychlosti
    - F síla v chapadle
    - $\dot{\boldsymbol{x}}$ rychlost chapadla

Analýza statiky

- Zachování energie: (výkon v kloubech) $=$ (výkon pro pohyb robota) $+$ (výkon v chapadle)
- Statická rovnováha: k pohybu robota se nepoužívá žádná energie, tj. žádný pohyb
  - (výkon v kloubech) $=$ (výkon v chapadle)
  - $\boldsymbol{\tau}^\top \dot{\boldsymbol{q}} = F^\top \dot{\boldsymbol{x}}$
    - $\boldsymbol{\tau}$ kloubové momenty/síly
    - $\dot{\boldsymbol{q}}$ kloubové rychlosti
    - F síla v chapadle
    - $\dot{\boldsymbol{x}}$ rychlost chapadla
  - $\dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$
  - $\boldsymbol{\tau}^\top = F^\top J(\boldsymbol{q})$

Analýza statiky

- Zachování energie: (výkon v kloubech) = (výkon pro pohyb robota) + (výkon v chapadle)
- Statická rovnováha: k pohybu robota se nepoužívá žádná energie, tj. žádný pohyb
  - (výkon v kloubech) = (výkon v chapadle)
  - $\boldsymbol{\tau}^\top \dot{\boldsymbol{q}} = F^\top \dot{\boldsymbol{x}}$
    - $\boldsymbol{\tau}$ kloubové momenty/síly
    - $\dot{\boldsymbol{q}}$ kloubové rychlosti
    - F síla v chapadle
    - $\dot{\boldsymbol{x}}$ rychlost chapadla
  - $\dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$
  - $\boldsymbol{\tau}^\top = F^\top J(\boldsymbol{q})$
  - $\boldsymbol{\tau} = J(\boldsymbol{q})^\top F$

Statika - kompenzace vnější síly

- Zvažme vnější sílu působící na chapadlo $-F$.
- Jak vypočítat kloubové momenty tak, aby byl robot statický?

Statika - kompenzace vnější síly

- Zvažme vnější sílu působící na chapadlo $-F$.
- Jak vypočítat kloubové momenty tak, aby byl robot statický?
  - $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = J(\boldsymbol{q})^\top F$
  - koncový efektor potřebuje generovat sílu F, aby kompenzoval vnější $-F$

Statika - kompenzace vnější síly

- Zvažme vnější sílu působící na chapadlo $-F$.
- Jak vypočítat kloubové momenty tak, aby byl robot statický?
  - $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = J(\boldsymbol{q})^\top F$
  - koncový efektor potřebuje generovat sílu F, aby kompenzoval vnější $-F$
  - tato rovnice předpokládá, že gravitace na robota nepůsobí
  - $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} + \boldsymbol{\tau}_g$
    - $\boldsymbol{\tau}_g$ kompenzuje gravitaci působící na robota

Statika - kompenzace vnější síly

- Zvažme vnější sílu působící na chapadlo $-F$.
- Jak vypočítat kloubové momenty tak, aby byl robot statický?
  - $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = J(\boldsymbol{q})^\top F$
  - koncový efektor potřebuje generovat sílu F, aby kompenzoval vnější $-F$
  - tato rovnice předpokládá, že gravitace na robota nepůsobí
  - $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} + \boldsymbol{\tau}_g$
    - $\boldsymbol{\tau}_g$ kompenzuje gravitaci působící na robota
  - U robota Panda můžeme přímo ovládat $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$

Síla způsobená danými momenty

- Pokud inverze J existuje (kdy?)
  - $F = J(\boldsymbol{q})^{-\top}\boldsymbol{\tau}$

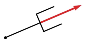
Síla způsobená danými momenty

- Pokud inverze J existuje (kdy?)
  - $F = J(\boldsymbol{q})^{-\top}\boldsymbol{\tau}$
- Redundantní roboti
  - i pro pevné chapadlo můžeme mít vnitřní pohyb
  - předpoklad statické rovnováhy není platný $\rightarrow$ potřeba dynamiky

Síla způsobená danými momenty

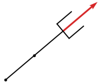
- Pokud inverze J existuje (kdy?)
  - $F = J(\boldsymbol{q})^{-\top}\boldsymbol{\tau}$
- Redundantní roboti
  - i pro pevné chapadlo můžeme mít vnitřní pohyb
  - předpoklad statické rovnováhy není platný $\rightarrow$ potřeba dynamiky
- Podaktuovaní roboti
  - pevný koncový efektor znehybní robota
  - robot nemůže aktivně generovat síly v nulovém prostoru $J^\top$:
    $\ker(J^\top) = \{F \,|\, J^\top F = \mathbf{0}\}$
  - robot však může odolávat vnější síle v nulovém prostoru, aniž by se pohnul

Síla způsobená danými momenty



- Pokud inverze J existuje (kdy?)
  - $F = J(\boldsymbol{q})^{-\top}\boldsymbol{\tau}$
- Redundantní roboti
  - i pro pevné chapadlo můžeme mít vnitřní pohyb
  - předpoklad statické rovnováhy není platný $\rightarrow$ potřeba dynamiky
- Podaktuovaní roboti
  - pevný koncový efektor znehybní robota
  - robot nemůže aktivně generovat síly v nulovém prostoru $J^\top$: $\ker(J^\top) = \{F \,|\, J^\top F = \mathbf{0}\}$
  - robot však může odolávat vnější síle v nulovém prostoru, aniž by se pohnul
  - červená šipka ukazuje nulový prostor

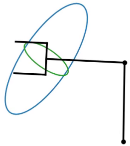
Síla způsobená danými momenty



- Pokud inverze J existuje (kdy?)
  - $F = J(\boldsymbol{q})^{-\top}\boldsymbol{\tau}$
- Redundantní roboti
  - i pro pevné chapadlo můžeme mít vnitřní pohyb
  - předpoklad statické rovnováhy není platný $\rightarrow$ potřeba dynamiky
- Podaktuovaní roboti
  - pevný koncový efektor znehybní robota
  - robot nemůže aktivně generovat síly v nulovém prostoru $J^\top$: $\ker(J^\top) = \{F \,|\, J^\top F = \mathbf{0}\}$
  - robot však může odolávat vnější síle v nulovém prostoru, aniž by se pohnul
  - červená šipka ukazuje nulový prostor
- Singularity (čtvercová J, ale inverze neexistuje)
  - nenulový nulový prostor

Silový elipsoid

- Jak snadné je generovat sílu v daném směru.
- Eigen analýza $(JJ^\top)^{-1}$
  - Modře - manipulační elipsoid (tj. $JJ^\top$)
  - Zeleně - silový elipsoid (tj. $(JJ^\top)^{-1}$)
- Snadný pohyb v daném směru $\rightarrow$ obtížné kompenzovat sílu v tomto směru
- Blízko singularitě:
  - obsah elipsoidu manipulovatelnosti $\rightarrow 0$
  - obsah silového elipsoidu $\rightarrow \infty$



Shrnutí

- Diferenciální kinematika
  - Jakobián a jeho vlastnosti
  - Jak vypočítat jakobián
  - Manipulační elipsoid
  - Jak měřit vzdálenost k singularitě
- Statika
  - Statický rovnovážný vztah kloubových momentů/sil a sil/momentů chapadla
  - Silový elipsoid

Cvičení

- Implementace výpočtu jakobiánu pro planární manipulátor
  - Metoda konečné diference
  - Analyticky
- Generace pohybu v nulovém prostoru