



# Robotika: Inverzní Kinematika

Vladimír Petřík

[vladimir.petrik@cvut.cz](mailto:vladimir.petrik@cvut.cz)

16.10.2023

# Kinematické úlohy

- ▶ Přímá kinematika (FK)
  - ▶ jak vypočítat pozici chapadla z konfigurace
  - ▶  $\boldsymbol{x} = f_{\text{fk}}(\boldsymbol{q})$
  - ▶  $\boldsymbol{x}$  je vyjádřena v úkolovém prostoru, tzn.  $SE(2)$ ,  $SE(3)$ , nebo  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  pouze pro pozici
  - ▶  $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^N$  je konfigurace (prostor kloubu)



# Kinematické úlohy

- ▶ Přímá kinematika (FK)
  - ▶ jak vypočítat pozici chapadla z konfigurace
  - ▶  $\boldsymbol{x} = f_{\text{fk}}(\boldsymbol{q})$
  - ▶  $\boldsymbol{x}$  je vyjádřena v úkolovém prostoru, tzn.  $SE(2)$ ,  $SE(3)$ , nebo  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  pouze pro pozici
  - ▶  $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^N$  je konfigurace (prostor kloubů)
- ▶ Diferenciální kinematika
  - ▶ dává do vztahu rychlost chapadla s rychlostí kloubů
  - ▶  $\dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$



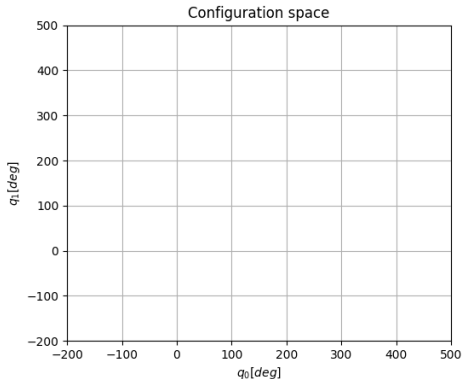
# Kinematické úlohy

- ▶ Přímá kinematika (FK)
  - ▶ jak vypočítat pozici chapadla z konfigurace
  - ▶  $\boldsymbol{x} = f_{\text{fk}}(\boldsymbol{q})$
  - ▶  $\boldsymbol{x}$  je vyjádřena v úkolovém prostoru, tzn.  $SE(2)$ ,  $SE(3)$ , nebo  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  pouze pro pozici
  - ▶  $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^N$  je konfigurace (prostor kloubu)
- ▶ Diferenciální kinematika
  - ▶ dává do vztahu rychlost chapadla s rychlostí kloubů
  - ▶  $\dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$
- ▶ Inverzní kinematika (IK)
  - ▶ jak vypočítat konfigurace robota pro danou konfiguraci chapadla
  - ▶  $\boldsymbol{q} \in f_{\text{ik}}(\boldsymbol{x})$



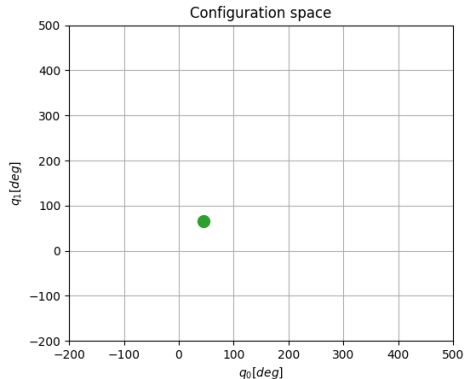
## Příklad: Analytická IK pro strukturu RR

- ▶ Úkolový prostor: translace chapadla,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Konfigurační (kloubový) prostor:  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$



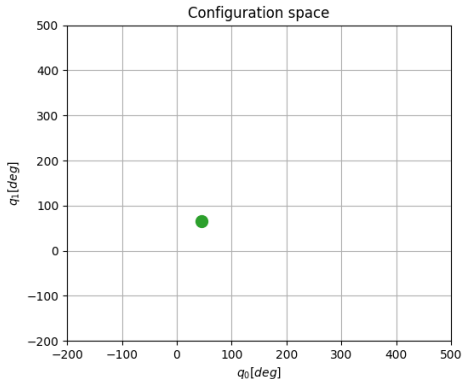
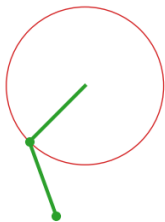
## Příklad: Analytická IK pro strukturu RR

- ▶ Úkolový prostor: translace chapadla,  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Konfigurační (kloubový) prostor:  $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2$



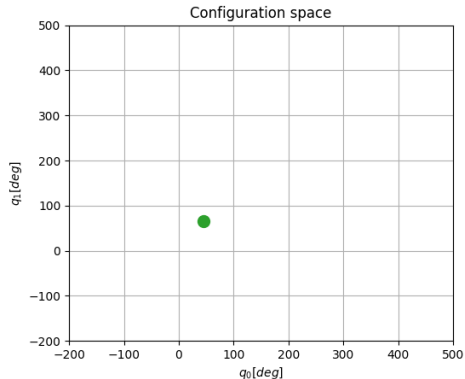
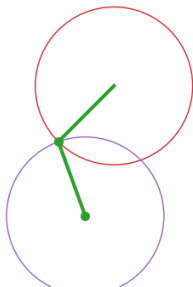
## Příklad: Analytická IK pro strukturu RR

- ▶ Úkolový prostor: translace chapadla,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Konfigurační (kloubový) prostor:  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$



## Příklad: Analytická IK pro strukturu RR

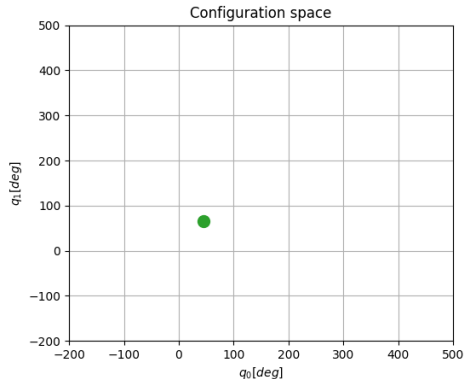
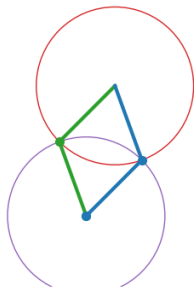
- ▶ Úkolový prostor: translace chapadla,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Konfigurační (kloubový) prostor:  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$





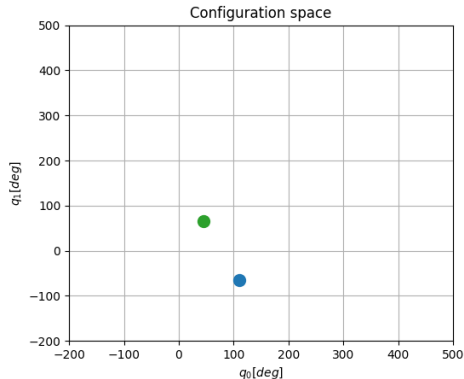
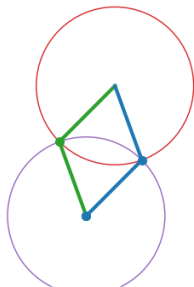
## Příklad: Analytická IK pro strukturu RR

- ▶ Úkolový prostor: translace chapadla,  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Konfigurační (kloubový) prostor:  $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2$



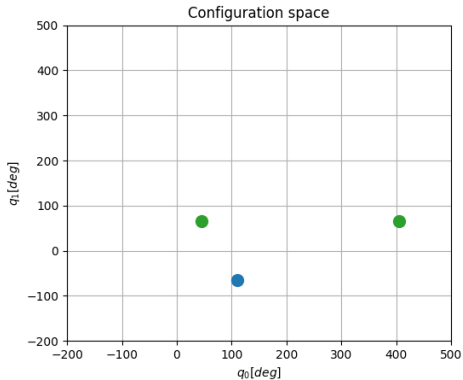
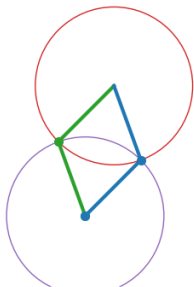
## Příklad: Analytická IK pro strukturu RR

- ▶ Úkolový prostor: translace chapadla,  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Konfigurační (kloubový) prostor:  $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2$



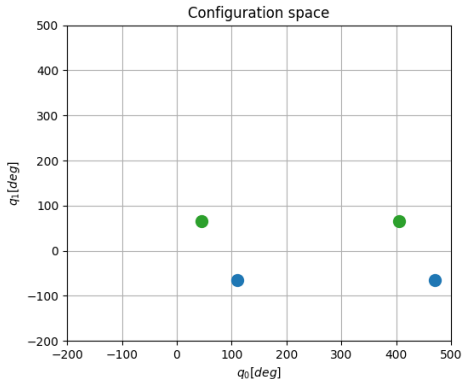
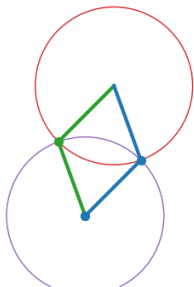
## Příklad: Analytická IK pro strukturu RR

- ▶ Úkolový prostor: translace chapadla,  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Konfigurační (kloubový) prostor:  $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2$



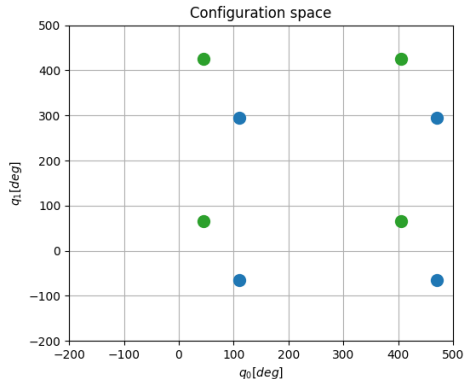
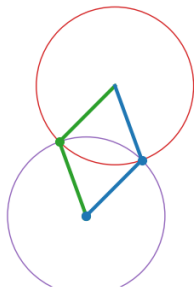
## Příklad: Analytická IK pro strukturu RR

- ▶ Úkolový prostor: translace chapadla,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Konfigurační (kloubový) prostor:  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$



## Příklad: Analytická IK pro strukturu RR

- ▶ Úkolový prostor: translace chapadla,  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Konfigurační (kloubový) prostor:  $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2$



## Příklad: Analytická IK pro strukturu RR

- ▶ Úkolový prostor: translace chapadla,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Konfigurační (kloubový) prostor:  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$
- ▶ Algoritmus:
  - ▶ Vypočítejte pozici (translaci) všech kloubů a chapadla
  - ▶ Žádné řešení, 1 řešení, 2 řešení, popř.  $\infty$  řešení
  - ▶ Pro každé řešení vypočítejte konfigurace kloubů  $\theta_i = \text{atan2}(y, x) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^\top = \mathbf{t}_{i,i+1}$ , t.j. translační část  $T_{i,i+1}$



# Numerická optimalizace

- ▶ Analytické řešení je často nedostupné
  - ▶ řešení neexistuje a hledáme nejbližší přibližné
  - ▶ existuje nekonečně mnoho řešení a my hledáme konfiguraci dle daného kritéria



# Numerická optimalizace

- ▶ Analytické řešení je často nedostupné
  - ▶ řešení neexistuje a hledáme nejbližší přibližné
  - ▶ existuje nekonečně mnoho řešení a my hledáme konfiguraci dle daného kritéria
- ▶ Můžeme použít obecný numerický algoritmus, který iterativně snižuje chyby
- ▶ **Newton-Raphsonova** metoda





# Numerická optimalizace

- ▶ Analytické řešení je často nedostupné
  - ▶ řešení neexistuje a hledáme nejbližší přibližné
  - ▶ existuje nekonečně mnoho řešení a my hledáme konfiguraci dle daného kritéria
- ▶ Můžeme použít obecný numerický algoritmus, který iterativně snižuje chyby
- ▶ **Newton-Raphsonova** metoda
  - ▶ řeší  $g(\theta) = 0, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



# Numerická optimalizace

- ▶ Analytické řešení je často nedostupné
  - ▶ řešení neexistuje a hledáme nejbližší přibližné
  - ▶ existuje nekonečně mnoho řešení a my hledáme konfiguraci dle daného kritéria
- ▶ Můžeme použít obecný numerický algoritmus, který iterativně snižuje chyby
- ▶ **Newton-Raphsonova** metoda
  - ▶ řeší  $g(\theta) = 0, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
  - ▶ Taylorův rozvoj  $g(\theta)$  v bodě  $\theta^0$ :  
 $g(\theta) = g(\theta^0) + \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^0)(\theta - \theta^0) + \text{členy vyššího řádu}$



# Numerická optimalizace

- ▶ Analytické řešení je často nedostupné
  - ▶ řešení neexistuje a hledáme nejbližší přibližné
  - ▶ existuje nekonečně mnoho řešení a my hledáme konfiguraci dle daného kritéria
- ▶ Můžeme použít obecný numerický algoritmus, který iterativně snižuje chyby
- ▶ **Newton-Raphsonova** metoda
  - ▶ řeší  $g(\theta) = 0, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
  - ▶ Taylorův rozvoj  $g(\theta)$  v bodě  $\theta^0$ :  
 $g(\theta) = g(\theta^0) + \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^0)(\theta - \theta^0) + \text{členy vyššího řádu}$
  - ▶ dosazením  $g(\theta) = 0$ , ignorováním členů vyššího řádu a vyjmutím  $\theta$ :  
$$\theta \approx \theta^0 - \left( \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^0) \right)^{-1} g(\theta^0)$$



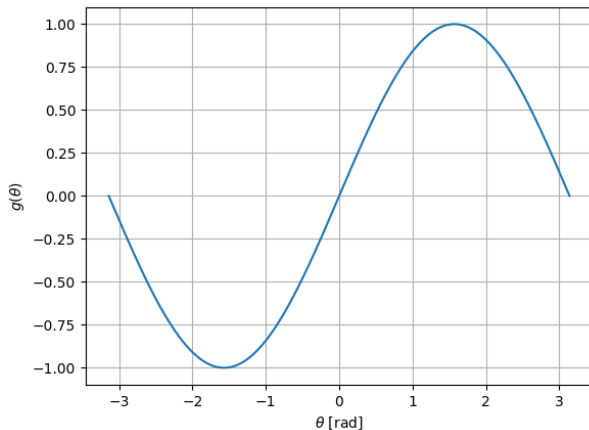
# Numerická optimalizace

- ▶ Analytické řešení je často nedostupné
  - ▶ řešení neexistuje a hledáme nejbližší přibližné
  - ▶ existuje nekonečně mnoho řešení a my hledáme konfiguraci dle daného kritéria
- ▶ Můžeme použít obecný numerický algoritmus, který iterativně snižuje chyby
- ▶ **Newton-Raphsonova** metoda
  - ▶ řeší  $g(\theta) = 0, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
  - ▶ Taylorův rozvoj  $g(\theta)$  v bodě  $\theta^0$ :  
$$g(\theta) = g(\theta^0) + \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^0)(\theta - \theta^0) + \text{členy vyššího řádu}$$
  - ▶ dosazením  $g(\theta) = 0$ , ignorováním členů vyššího řádu a vyjmutím  $\theta$ :  
$$\theta \approx \theta^0 - \left( \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^0) \right)^{-1} g(\theta^0)$$
  - ▶ protože ignorujeme členy vyššího řádu, musíme iterovat:  
$$\theta^{k+1} = \theta^k - \left( \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^k) \right)^{-1} g(\theta^k)$$



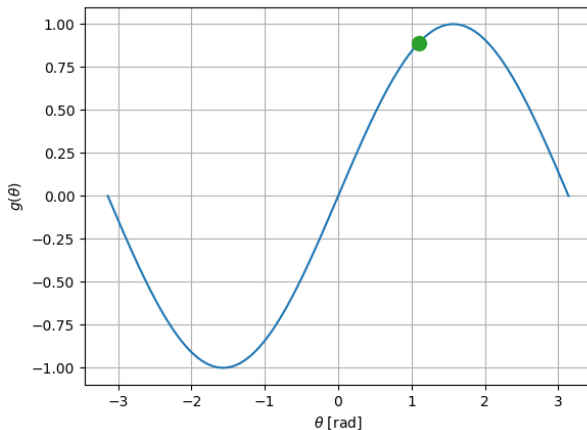
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 1$



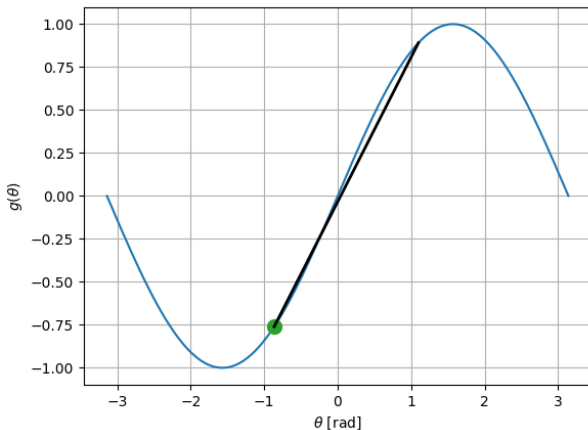
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezní  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 1$



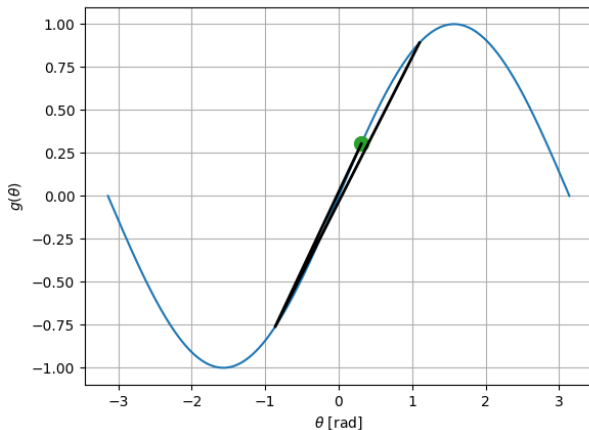
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 1$



## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

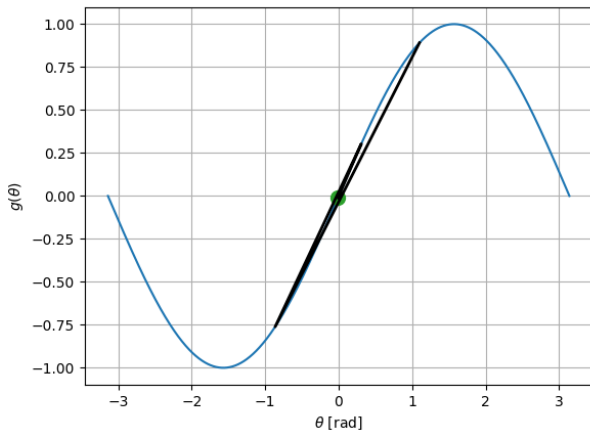
- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezní  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1,1$





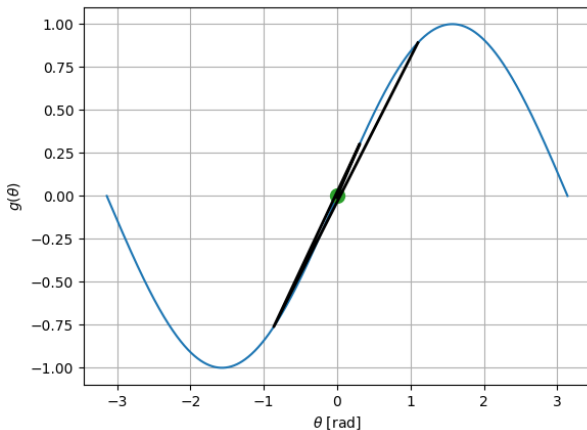
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 1$



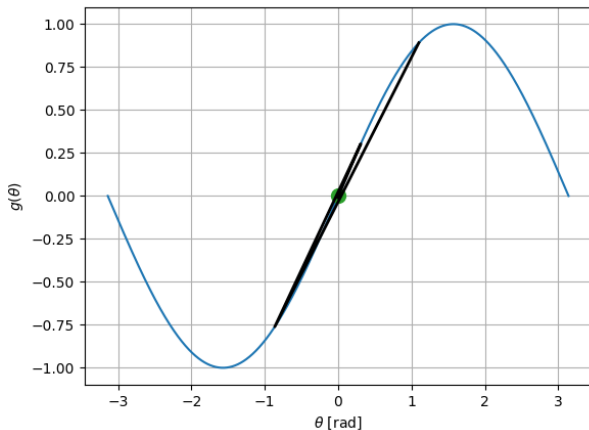
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 1$



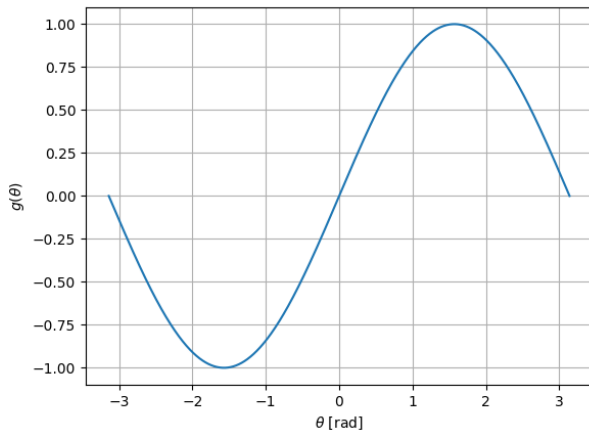
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 1$



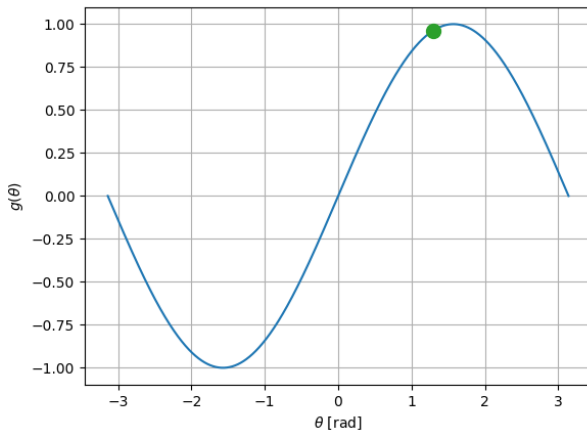
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 3$
- ▶ Kvalita řešení závisí na počátečním odhadu



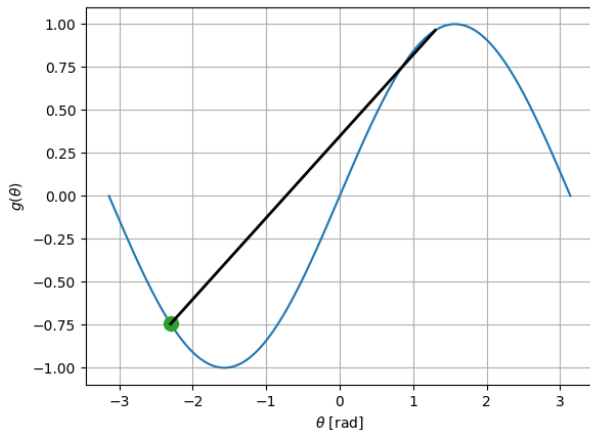
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1,3$
- ▶ Kvalita řešení závisí na počátečním odhadu



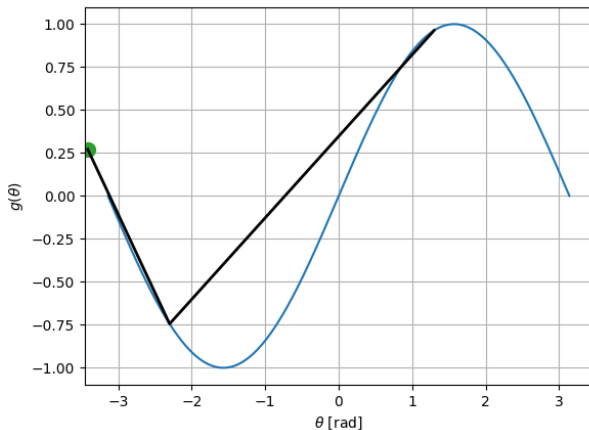
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , najdi  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1,3$
- ▶ Kvalita řešení závisí na počátečním odhadu



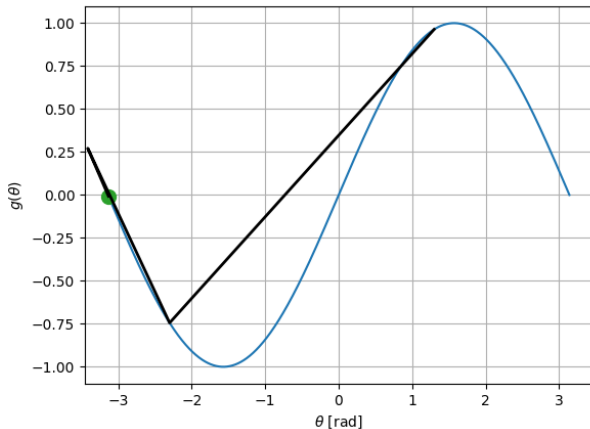
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1,3$
- ▶ Kvalita řešení závisí na počátečním odhadu



## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

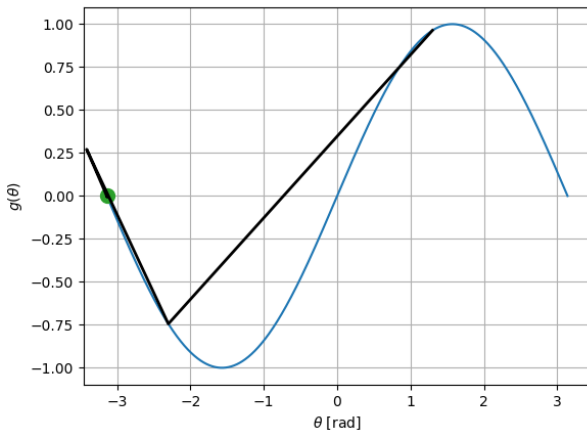
- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1,3$
- ▶ Kvalita řešení závisí na počátečním odhadu





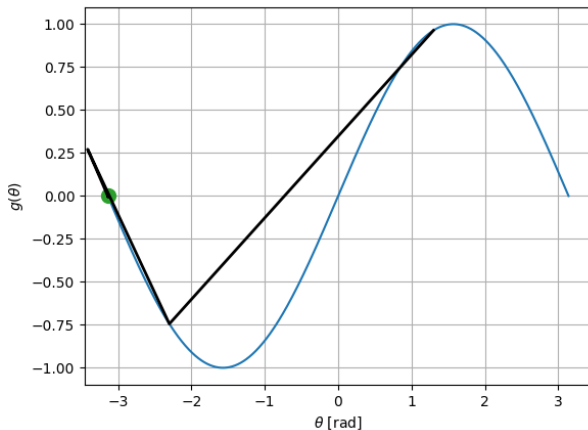
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , najdi  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1,3$
- ▶ Kvalita řešení závisí na počátečním odhadu



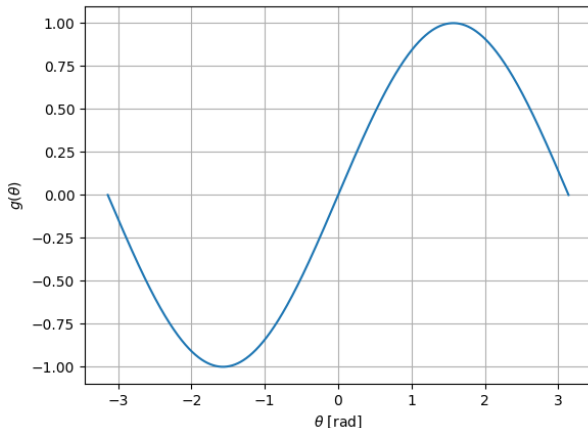
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , najdi  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1,3$
- ▶ Kvalita řešení závisí na počátečním odhadu



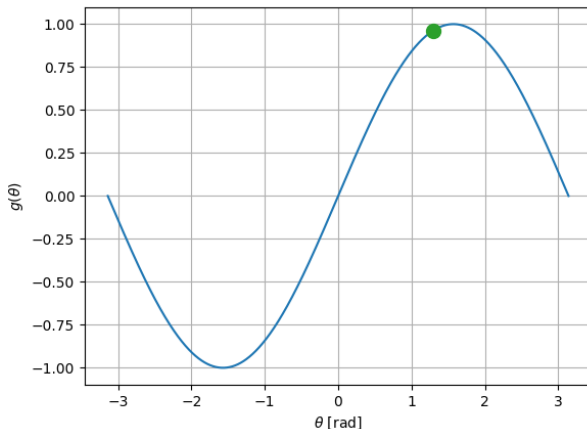
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , najdi  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 3$ ,  $\alpha = 0, 5$
- ▶  $\theta^{k+1} = \theta^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^k) \right)^{-1} g(\theta^k)$



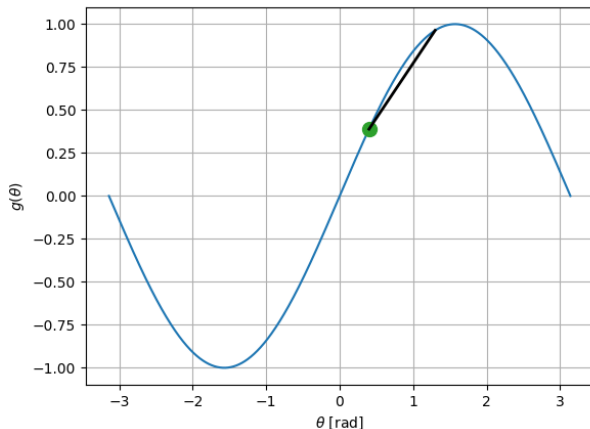
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , najdi  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 3$ ,  $\alpha = 0, 5$
- ▶  $\theta^{k+1} = \theta^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^k) \right)^{-1} g(\theta^k)$



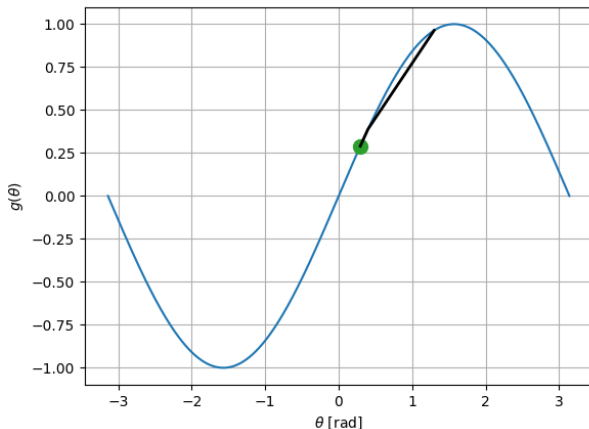
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , najdi  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 3$ ,  $\alpha = 0, 5$
- ▶  $\theta^{k+1} = \theta^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^k) \right)^{-1} g(\theta^k)$



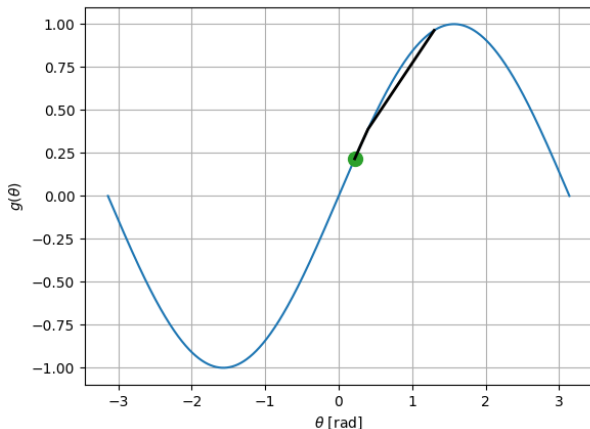
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 3$ ,  $\alpha = 0, 5$
- ▶  $\theta^{k+1} = \theta^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^k) \right)^{-1} g(\theta^k)$



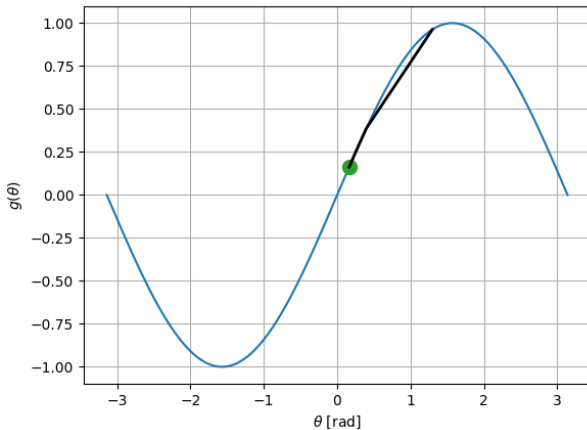
## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 3$ ,  $\alpha = 0, 5$
- ▶  $\theta^{k+1} = \theta^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^k) \right)^{-1} g(\theta^k)$



## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

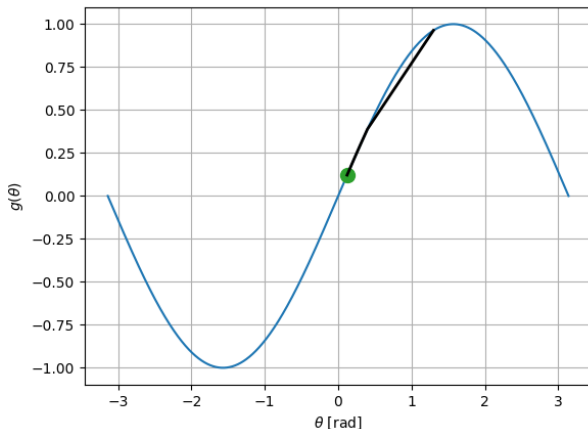
- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 3$ ,  $\alpha = 0, 5$
- ▶  $\theta^{k+1} = \theta^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^k) \right)^{-1} g(\theta^k)$





## Příklad 1D Newton-Raphsonovy metody

- ▶  $g(\theta) = \sin(\theta)$ , nalezni  $\theta^*$  tak, aby  $g(\theta^*) = 0$ ,  $\theta^0 = 1, 3$ ,  $\alpha = 0, 5$
- ▶  $\theta^{k+1} = \theta^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta^k) \right)^{-1} g(\theta^k)$



## Jak najít $\alpha$ ?

- ▶ Line-search algoritmus



## Jak najít $\alpha$ ?

- ▶ Line-search algoritmus
- ▶ Nalezni  $\alpha$  tak, aby  $g(\theta^{k+1}) < g(\theta^k)$



## Jak najít $\alpha$ ?

- ▶ Line-search algoritmus
- ▶ Nalezni  $\alpha$  tak, aby  $g(\theta^{k+1}) < g(\theta^k)$
- ▶ Algoritmus:
  - ▶  $\alpha^0 = 1$



## Jak najít $\alpha$ ?

- ▶ Line-search algoritmus
- ▶ Nalezni  $\alpha$  tak, aby  $g(\theta^{k+1}) < g(\theta^k)$
- ▶ Algoritmus:
  - ▶  $\alpha^0 = 1$
  - ▶ jestli  $g(\theta^{k+1}) < g(\theta^k)$ : konec



## Jak najít $\alpha$ ?

- ▶ Line-search algoritmus
- ▶ Nalezni  $\alpha$  tak, aby  $g(\theta^{k+1}) < g(\theta^k)$
- ▶ Algoritmus:
  - ▶  $\alpha^0 = 1$
  - ▶ jestli  $g(\theta^{k+1}) < g(\theta^k)$ : konec
  - ▶  $\alpha^{i+1} = \tau\alpha^i$ ,  $0 < \tau < 1$ , např.  $\tau = 0,5$
  - ▶ opakuj



## Jak najít $\alpha$ ?

- ▶ Line-search algoritmus
- ▶ Nalezni  $\alpha$  tak, aby  $g(\theta^{k+1}) < g(\theta^k)$
- ▶ Algoritmus:
  - ▶  $\alpha^0 = 1$
  - ▶ jestli  $g(\theta^{k+1}) < g(\theta^k)$ : konec
  - ▶  $\alpha^{i+1} = \tau\alpha^i$ ,  $0 < \tau < 1$ , např.  $\tau = 0,5$
  - ▶ opakuj
- ▶ Existují sofistikovanější algoritmy pro line-search



## Numerické řešení pro RR IK

- ▶ Newton–Raphsonova metoda pro  $n$ -rozměrný případ

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}^k) \right)^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^k) \text{ řeší } g(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$$





## Numerické řešení pro RR IK

- ▶ Newton–Raphsonova metoda pro  $n$ -rozměrný případ

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}^k) \right)^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^k) \text{ řeší } g(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$$

- ▶ Pro kinematiku manipulátoru:

$$g(\mathbf{q}) = \mathbf{x}_d - f_{fk}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^2$$



## Numerické řešení pro RR IK

- ▶ Newton–Raphsonova metoda pro  $n$ -rozměrný případ

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}^k) \right)^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^k) \text{ řeší } g(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$$

- ▶ Pro kinematiku manipulátoru:

$$g(\mathbf{q}) = \mathbf{x}_d - f_{\text{fk}}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^2$$

- ▶ Podle metody NR (pro  $g(\mathbf{q}) = 0$ ):

$$\mathbf{x}_d = f_{\text{fk}}(\mathbf{q}_d) \approx f_{\text{fk}}(\mathbf{q}^0) + \frac{\partial f_{\text{fk}}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^0)(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}^0)$$



## Numerické řešení pro RR IK

- ▶ Newton–Raphsonova metoda pro  $n$ -rozměrný případ

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}^k) \right)^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^k) \text{ řeší } g(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$$

- ▶ Pro kinematiku manipulátoru:

$$g(\mathbf{q}) = \mathbf{x}_d - f_{\text{fk}}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^2$$

- ▶ Podle metody NR (pro  $g(\mathbf{q}) = 0$ ):

$$\mathbf{x}_d = f_{\text{fk}}(\mathbf{q}_d) \approx f_{\text{fk}}(\mathbf{q}^0) + \frac{\partial f_{\text{fk}}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^0)(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}^0) = f_{\text{fk}}(\mathbf{q}^0) + J(\mathbf{q}^0)(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}^0)$$



# Numerické řešení pro RR IK

- ▶ Newton–Raphsonova metoda pro  $n$ -rozměrný případ

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}^k) \right)^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^k) \text{ řeší } g(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$$

- ▶ Pro kinematiku manipulátoru:

$$g(\mathbf{q}) = \mathbf{x}_d - f_{\text{fk}}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^2$$

- ▶ Podle metody NR (pro  $g(\mathbf{q}) = 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d = f_{\text{fk}}(\mathbf{q}_d) &\approx f_{\text{fk}}(\mathbf{q}^0) + \frac{\partial f_{\text{fk}}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^0)(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}^0) = f_{\text{fk}}(\mathbf{q}^0) + J(\mathbf{q}^0)(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}^0) \\ \mathbf{q}_d &\approx \mathbf{q}^0 + J(\mathbf{q}^0)^{-1}(\mathbf{x}_d - f_{\text{fk}}(\mathbf{q}^0)) \end{aligned}$$



# Numerické řešení pro RR IK

- ▶ Newton–Raphsonova metoda pro  $n$ -rozměrný případ

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}^k) \right)^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^k) \text{ řeší } g(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$$

- ▶ Pro kinematiku manipulátoru:

$$g(\mathbf{q}) = \mathbf{x}_d - f_{\text{fk}}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^2$$

- ▶ Podle metody NR (pro  $g(\mathbf{q}) = 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d = f_{\text{fk}}(\mathbf{q}_d) &\approx f_{\text{fk}}(\mathbf{q}^0) + \frac{\partial f_{\text{fk}}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^0)(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}^0) = f_{\text{fk}}(\mathbf{q}^0) + J(\mathbf{q}^0)(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}^0) \\ \mathbf{q}_d &\approx \mathbf{q}^0 + J(\mathbf{q}^0)^{-1}(\mathbf{x}_d - f_{\text{fk}}(\mathbf{q}^0)) \end{aligned}$$

- ▶ Iterativně pomocí line-search:

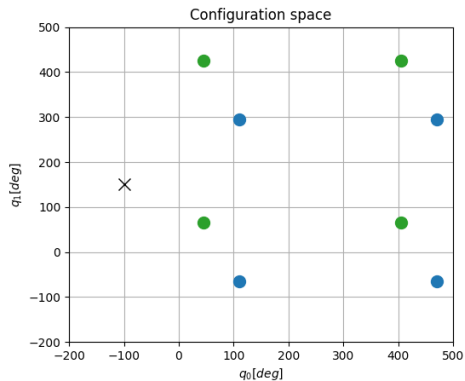
$$\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k + \alpha J(\mathbf{q}^k)^{-1}(\mathbf{x}_d - f_{\text{fk}}(\mathbf{q}^k))$$

- ▶ Intuice skrze diferenciální kinematiku:

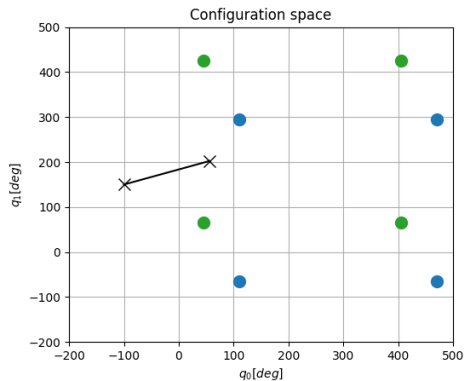
- ▶ jaká by měla být rychlost v kloubovém prostoru tak, abychom dosáhli dané rychlosti v úkolovém prostoru
- ▶  $\dot{\mathbf{q}} = J^{-1}\dot{\mathbf{x}}$



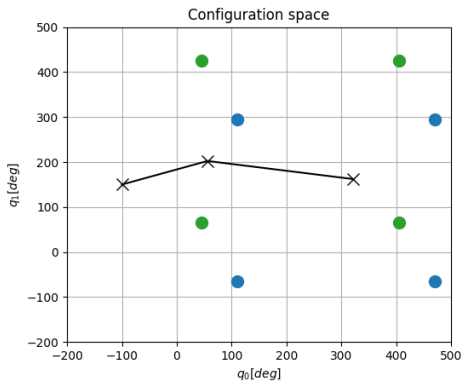
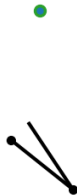
# Numerické řešení pro RR IK #1



# Numerické řešení pro RR IK #1

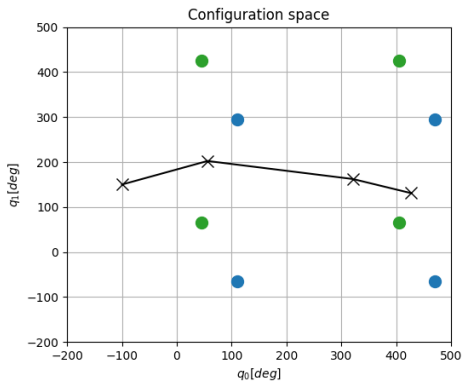


# Numerické řešení pro RR IK #1

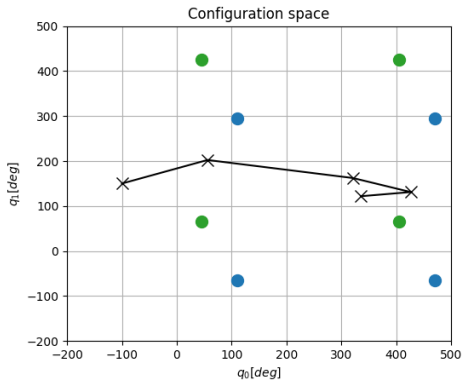




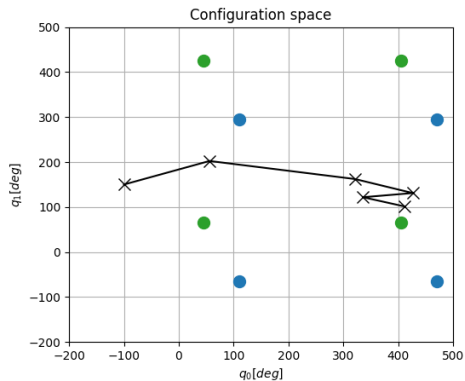
# Numerické řešení pro RR IK #1



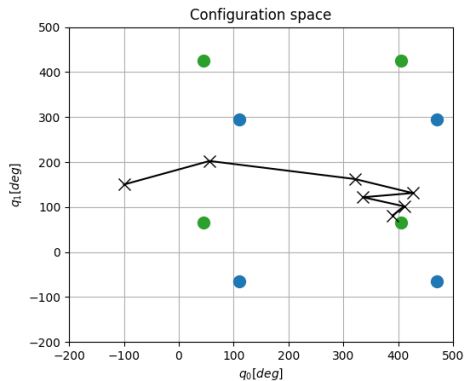
# Numerické řešení pro RR IK #1



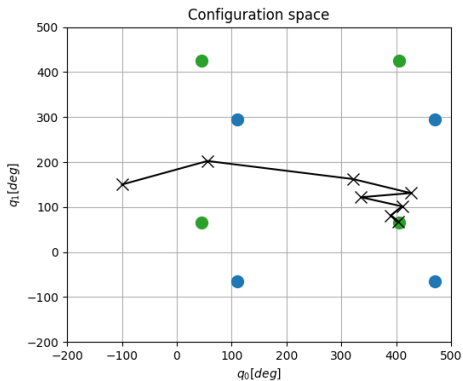
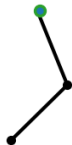
# Numerické řešení pro RR IK #1



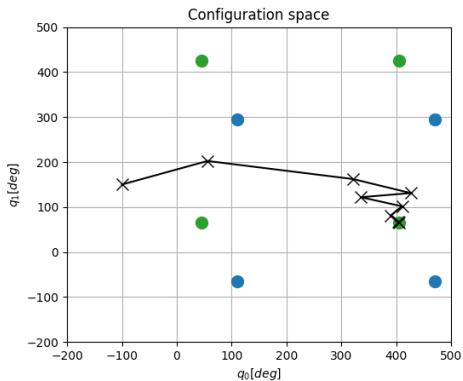
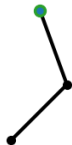
# Numerické řešení pro RR IK #1



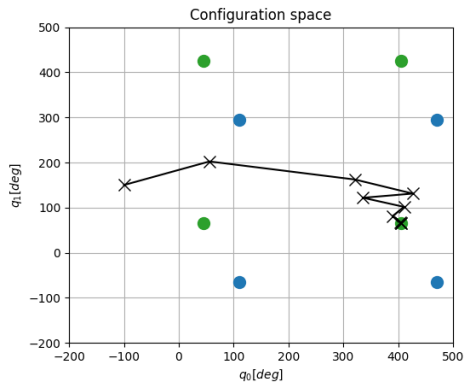
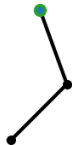
# Numerické řešení pro RR IK #1



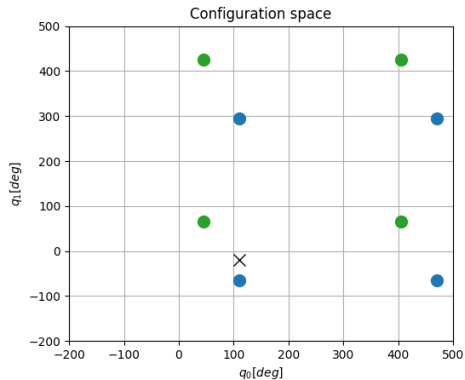
# Numerické řešení pro RR IK #1



# Numerické řešení pro RR IK #1

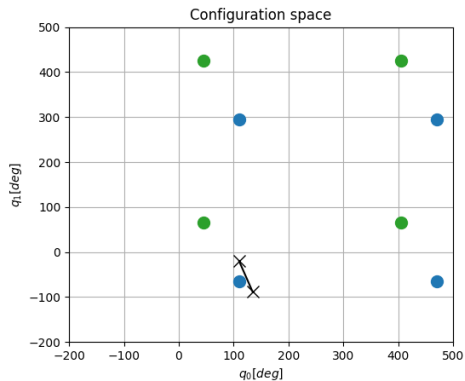
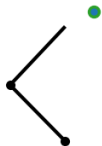


# Numerické řešení pro RR IK #2

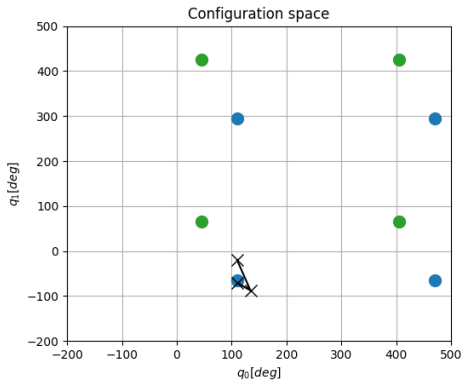




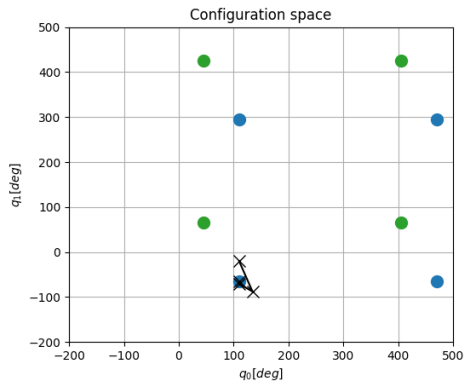
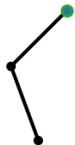
# Numerické řešení pro RR IK #2



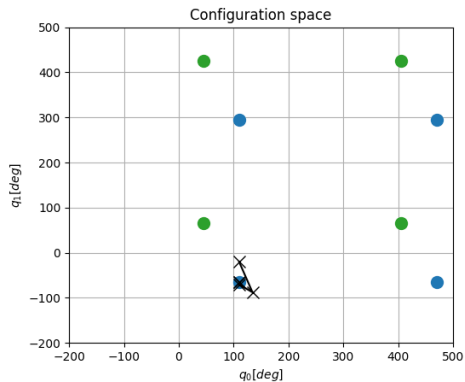
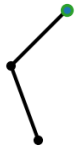
# Numerické řešení pro RR IK #2



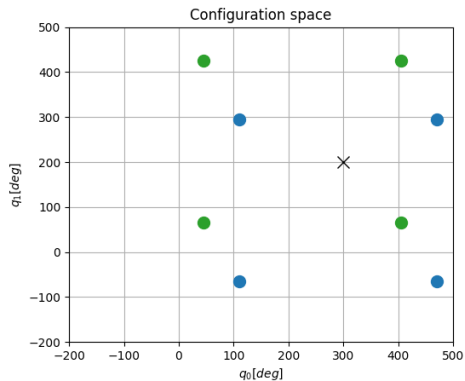
# Numerické řešení pro RR IK #2



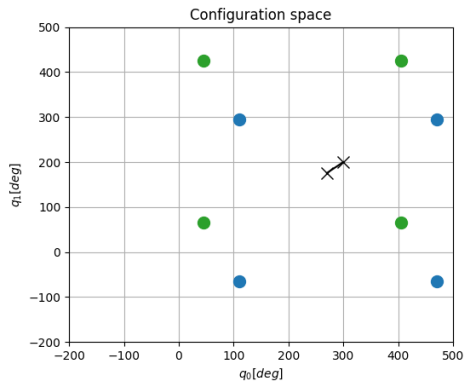
# Numerické řešení pro RR IK #2



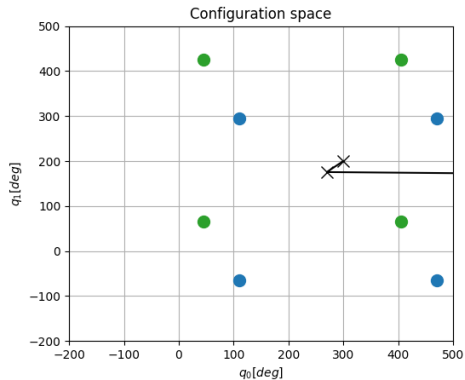
# Numerické řešení pro RR IK #3



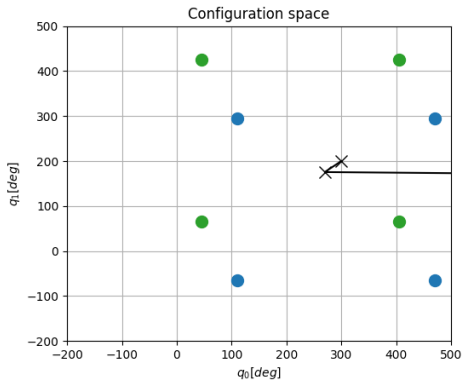
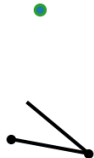
# Numerické řešení pro RR IK #3



# Numerické řešení pro RR IK #3

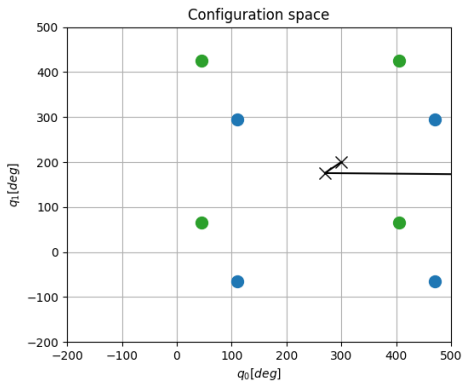


# Numerické řešení pro RR IK #3

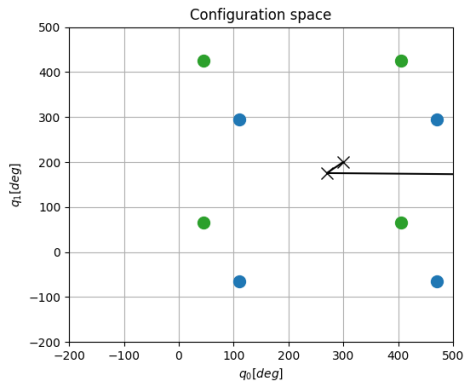




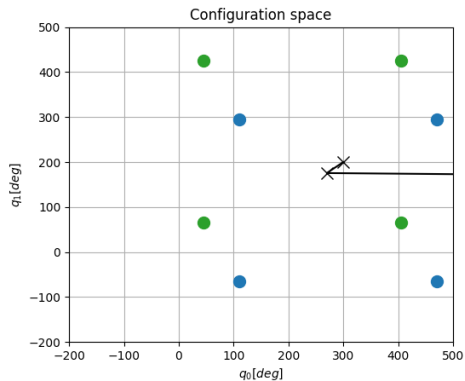
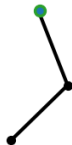
# Numerické řešení pro RR IK #3



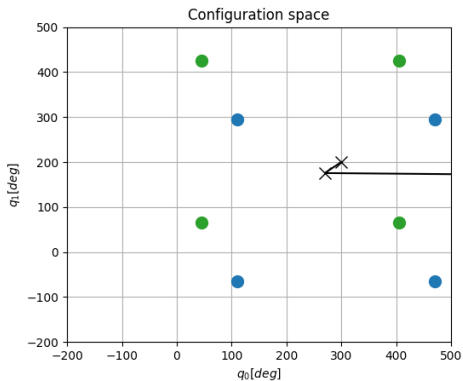
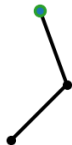
# Numerické řešení pro RR IK #3



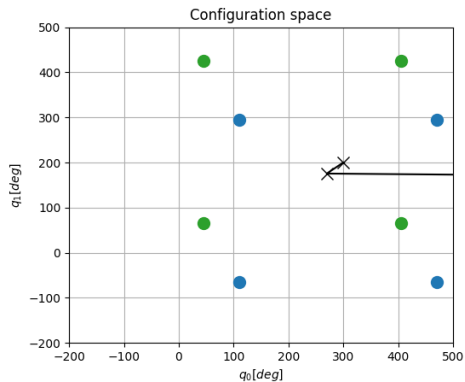
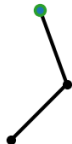
# Numerické řešení pro RR IK #3



# Numerické řešení pro RR IK #3



# Numerické řešení pro RR IK #3



## Numerické řešení - shrnutí

- ▶ Numerické řešení je snadno implementovatelné pro obecné manipulátory
- ▶ Prvotní odhad je důležitý
  - ▶ pokud jsme *blízko* řešení, FK je téměř lineární, budeme konvergovat k *nejbližšímu* řešení
  - ▶ pokud jsme příliš *daleko*, nemáme žádnou kontrolu nad tím, jaké řešení je vybráno
  - ▶ může pomoci vyladění velikosti kroku
- ▶ Musíme definovat kritérium konvergence
  - ▶ např.  $\|\mathbf{x}_d - \mathbf{f}_{fk}(\mathbf{q}^k)\| < \varepsilon$



## Co když $J$ není invertibilní?

- ▶ Redundantní roboti, podaktuovaní roboti, singularita



## Co když J není invertibilní?

- ▶ Redundantní roboti, podaktuovaní roboti, singularita
- ▶ Moore-Penroseova pseudoinverze  $J^\dagger$
- ▶  $\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k + \alpha J^\dagger(\mathbf{q}^k)(\mathbf{x}_d - f_{fk}(\mathbf{q}^k))$





## Co když $J$ není invertibilní?

- ▶ Redundantní roboti, podaktuovaní roboti, singularita
- ▶ Moore-Penroseova pseudoinverze  $J^\dagger$
- ▶  $\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k + \alpha J^\dagger(\mathbf{q}^k)(\mathbf{x}_d - f_{fk}(\mathbf{q}^k))$
- ▶ Redundantní roboti
  - ▶ nekonečno řešení pro dosažení stejné rychlosti v prostoru úkolu
  - ▶ pseudoinverze navíc minimalizuje  $\|\mathbf{q}\|$



## Co když $J$ není invertibilní?

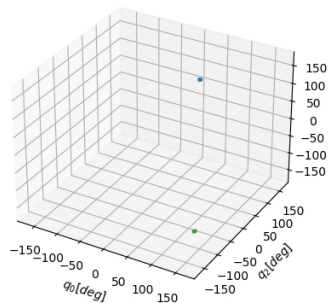
- ▶ Redundantní roboti, podaktuovaní roboti, singularita
- ▶ Moore-Penroseova pseudoinverze  $J^\dagger$
- ▶  $\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k + \alpha J^\dagger(\mathbf{q}^k)(\mathbf{x}_d - f_{fk}(\mathbf{q}^k))$
- ▶ Redundantní roboti
  - ▶ nekonečno řešení pro dosažení stejné rychlosti v prostoru úkolu
  - ▶ pseudoinverze navíc minimalizuje  $\|\mathbf{q}\|$
- ▶ Podaktuovaní roboti nebo singularita
  - ▶ neexistuje žádné přesné řešení pro rychlost úkolového prostoru
  - ▶ pseudoinverze minimalizuje chybu v prostoru úloh



# IK řešení pro redundantního robota



Configuration space



## IK v $SE(2)$ pro RRR

- ▶ Daná požadovaná transformace  $T_{RG}^D \in SE(2)$ 
  - ▶  $R$  - referenční s.s.
  - ▶  $G$  - s.s. chapadla (gripper)



## IK v $SE(2)$ pro RRR

- ▶ Daná požadovaná transformace  $T_{RG}^D \in SE(2)$ 
  - ▶  $R$  - referenční s.s.
  - ▶  $G$  - s.s. chapadla (gripper)
- ▶ Analytické řešení
  - ▶ rozdělit problém na rotaci (poslední kloub) a polohu (ostatní klouby)
  - ▶  $t_{RC} = T_{RG}^D (-l_3 \ 0 \ 1)^T$
  - ▶  $t_{RB}$  počítejte jako pro RR pro translační úkolový prostor
  - ▶ použijte atan2 pro výpočet konfigurace kloubů



## IK v $SE(2)$ pro RRR

- ▶ Daná požadovaná transformace  $T_{RG}^D \in SE(2)$ 
  - ▶  $R$  - referenční s.s.
  - ▶  $G$  - s.s. chapadla (gripper)
- ▶ Analytické řešení
  - ▶ rozdělit problém na rotaci (poslední kloub) a polohu (ostatní klouby)
  - ▶  $t_{RC} = T_{RG}^D (-l_3 \ 0 \ 1)^\top$
  - ▶  $t_{RB}$  počítejte jako pro RR pro translační úkolový prostor
  - ▶ použijte  $\text{atan2}$  pro výpočet konfigurace kloubů
- ▶ Numerické řešení
  - ▶ chyba v referenčním s.s:  
$$e(\mathbf{q}) = (x_{RG}^D - x_{RG}(\mathbf{q}) \quad y_{RG}^D - y_{RG}(\mathbf{q}) \quad \phi_{RG}^D - \phi_{RG}(\mathbf{q}))^\top$$



## IK v $SE(2)$ pro RRR

- ▶ Daná požadovaná transformace  $T_{RG}^D \in SE(2)$ 
  - ▶  $R$  - referenční s.s.
  - ▶  $G$  - s.s. chapadla (gripper)
- ▶ Analytické řešení
  - ▶ rozdělit problém na rotaci (poslední kloub) a polohu (ostatní klouby)
  - ▶  $t_{RC} = T_{RG}^D (-l_3 \ 0 \ 1)^\top$
  - ▶  $t_{RB}$  počítejte jako pro RR pro translační úkolový prostor
  - ▶ použijte  $\text{atan2}$  pro výpočet konfigurace kloubů
- ▶ Numerické řešení
  - ▶ chyba v referenčním s.s:
$$e(\mathbf{q}) = (x_{RG}^D - x_{RG}(\mathbf{q}) \quad y_{RG}^D - y_{RG}(\mathbf{q}) \quad \phi_{RG}^D - \phi_{RG}(\mathbf{q}))^\top$$
  - ▶ NR iterace:
$$\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k + \alpha J^\dagger(\mathbf{q}^k) e(\mathbf{q}^k)$$



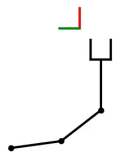
## IK v $SE(2)$ pro RRR

- ▶ Daná požadovaná transformace  $T_{RG}^D \in SE(2)$ 
  - ▶  $R$  - referenční s.s.
  - ▶  $G$  - s.s. chapadla (gripper)
- ▶ Analytické řešení
  - ▶ rozdělit problém na rotaci (poslední kloub) a polohu (ostatní klouby)
  - ▶  $t_{RC} = T_{RG}^D (-l_3 \ 0 \ 1)^\top$
  - ▶  $t_{RB}$  počítejte jako pro RR pro translační úkolový prostor
  - ▶ použijte  $\text{atan2}$  pro výpočet konfigurace kloubů
- ▶ Numerické řešení
  - ▶ chyba v referenčním s.s:  
$$e(\mathbf{q}) = (x_{RG}^D - x_{RG}(\mathbf{q}) \quad y_{RG}^D - y_{RG}(\mathbf{q}) \quad \phi_{RG}^D - \phi_{RG}(\mathbf{q}))^\top$$
  - ▶ NR iterace:  
$$\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k + \alpha J^\dagger(\mathbf{q}^k) e(\mathbf{q}^k)$$

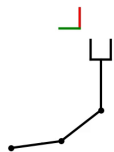




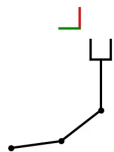
## Numerické řešení v $SE(2)$



## Numerické řešení v $SE(2)$



# Numerické řešení v $SE(2)$



## IK v $SE(3)$

- ▶ Numerický IK algoritmus je téměř stejný
  - ▶ chyba se musí vypočítat pomocí transformací
  - ▶ stejně jako v rovinném případě, chyba musí být reprezentována v referenčním s.s.



## IK v $SE(3)$

- ▶ Numerický IK algoritmus je téměř stejný
  - ▶ chyba se musí vypočítat pomocí transformací
  - ▶ stejně jako v rovinném případě, chyba musí být reprezentována v referenčním s.s.
- ▶ Analytické řešení nemusí pro obecný 6 DoF manipulátor existovat



## IK v $SE(3)$

- ▶ Numerický IK algoritmus je téměř stejný
  - ▶ chyba se musí vypočítat pomocí transformací
  - ▶ stejně jako v rovinném případě, chyba musí být reprezentována v referenčním s.s.
- ▶ Analytické řešení nemusí pro obecný 6 DoF manipulátor existovat
- ▶ Pro prostorového 6 DoF robota s otočnými klouby
  - ▶ řešení lze oddělit, pokud se poslední tři kloubové osy vzájemně protínají
  - ▶ poslední tři klouby se použijí k orientaci chapadla
  - ▶ první tři klouby se použijí k polohování příruby



## Příklad důležitosti více řešení



# Shrnutí

- ▶ Inverzní kinematika
  - ▶ analytické řešení pomocí geometrické analýzy
    - ▶ vede k výpočtu průniků geometrických primitiv
  - ▶ numerické řešení, Newton–Raphsonova metoda
    - ▶ Jakobián
    - ▶ pseudoinverze
- ▶ Počet řešení inverzní kinematiky
  - ▶ žádné řešení
  - ▶ více řešení
  - ▶ periodické řešení
  - ▶ nekonečný počet řešení





# Cvičení

- ▶ Numerická IK v  $SE(2)$
- ▶ Analytická IK v  $SE(2)$  pro RRR manipulátor
- ▶ Analytická IK v  $SE(2)$  pro PRR manipulátor [dobrovolné]

