



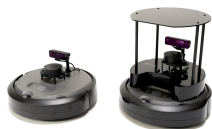
Robotika: Reprezentace pohybu

Vladimír Petřík

vladimir.petrik@cvut.cz

23.09.2023

Co je to robot?



Mobilní robot, UGV -
unmanned ground vehicle



Létající roboti (např. drony)



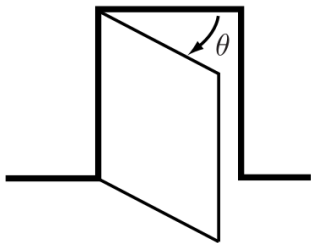
Kráčející roboti (např.
humanoidi)



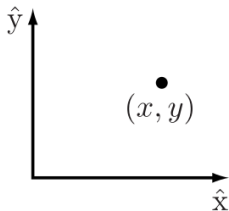
Manipulátory (např. Franka
Emika Panda)

Konfigurace robota

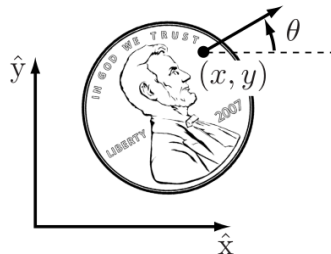
- Kompletní specifikace každého bodu na robotovi.



Konfigurace je popsána úhlem θ .



Bod v rovině je popsán dvěma souřadnicemi.



Konfigurace planárního tuhého tělesa se skládá z pozice a orientace.

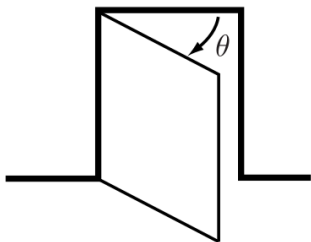
Stupně volnosti (DoF)

- ▶ Minimální počet souřadnic potřebných k reprezentaci konfigurace.
 - ▶ dveře: 1
 - ▶ bod v rovině: 2
 - ▶ tuhé těleso v rovině: 3
 - ▶ manipulátory: od 1 (např. rotační stůl) do desítek (humanoidi)
- ▶ Určení DoF
 - ▶ (součet volností bodů) - (počet nezávislých omezení)
 - ▶ Tuhé těleso - jak je definováno?
 - ▶ Vzdálenost mezi libovolnými dvěma danými body na tuhém tělese zůstává konstantní
 - ▶ Příklad: omezení pro N bodů rovinného tuhého objektu
 - ▶ U některých robotů je určení počtu stupňů volnosti netriviální

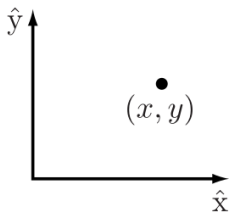


Konfigurační prostor - \mathcal{C}

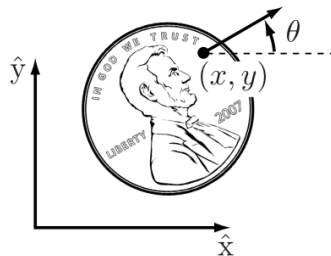
- ▶ N -rozměrný prostor (N odpovídá počtu stupňů volnosti)
- ▶ Každý bod konfiguračního prostoru odpovídá jedné konfiguraci
- ▶ Obsahuje všechny možné konfigurace robota



$\mathcal{C} : \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ nebo
 $\mathcal{C} : \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$



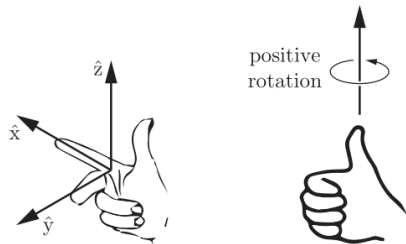
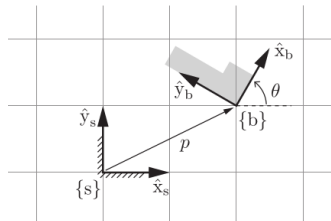
$\mathcal{C} : \mathbb{R}^2$



$\mathcal{C} : \mathbb{R}^2 \times \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ proč ne
 \mathbb{R}^3 ?

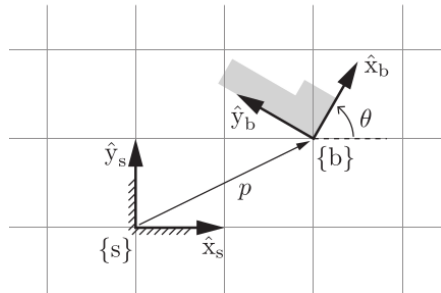
Pohyb tuhého tělesa v rovině

- ▶ K tuhému tělu připevníme s.s. (frame) $\{b\}$
 - ▶ Často se umísťuje do těžiště (ale není vyžadováno)
 - ▶ Lze umístit mimo tělo
 - ▶ S.s. $\{b\}$ se nepohybuje vzhledem k tělu
- ▶ Vybereme pevný **referenční** s.s.
 - ▶ střed místnosti
 - ▶ roh stolu
 - ▶ základna manipulátoru
- ▶ Všechny s.s. jsou pravotočivé



Pohyb tuhého tělesa v rovině

- ▶ Konfigurace objektu je určena
 - ▶ pozicí s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
 - ▶ orientací s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
 - ▶ Pozice s.s. objektu
 - ▶ $\mathbf{p} = p_x \hat{\mathbf{x}}_s + p_y \hat{\mathbf{y}}_s \in \mathbb{R}^2$
 - ▶ Pokud je referenční s.s. jasný z kontextu: $\mathbf{p} = (p_x, p_y)^\top$
 - ▶ Orientace
 - ▶ Úhel $\theta \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$
 - ▶ Vhodné pro další výpočty:
 $\hat{\mathbf{x}}_b = +\cos \theta \hat{\mathbf{x}}_s + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}_s$
 $\hat{\mathbf{y}}_b = -\sin \theta \hat{\mathbf{x}}_s + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}_s$
- Rotační matice $R = (\hat{\mathbf{x}}_b, \hat{\mathbf{y}}_b) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$



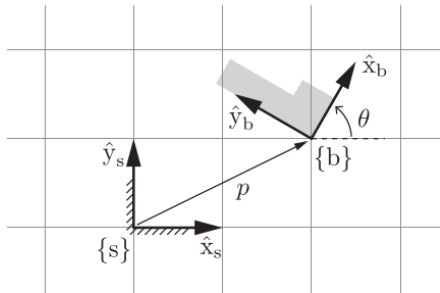
$SO(2)$

- ▶ R má 4 čísla, ale pouze 1 DoF - 3 nezávislá omezení
 - ▶ oba sloupce jsou jednotkové vektory
 - ▶ sloupce jsou navzájem ortogonální
- ▶ Množina všech rotačních matic je $SO(2)$, tzn. $R \in SO(2)$
 - ▶ Special Orthogonal group
 - ▶ $\det(R) = 1$
 - ▶ $RR^T = I$, i.e. $R^{-1} = R^T$
 - ▶ $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$
 - ▶ **Pro** $SO(2)$ $R_1 R_2 \stackrel{?}{=} R_2 R_1$
- ▶ Použití rotační matice
 - ▶ pro reprezentaci orientace s.s.
 - ▶ pro změnu referenčního s.s., ve kterém je vektor reprezentován
 - ▶ pro otočení vektoru nebo s.s.



$SE(2)$

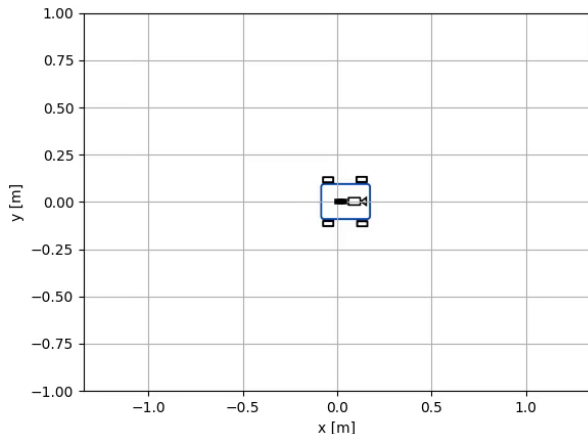
- ▶ Pár (R_{ab}, \mathbf{p})
 - ▶ reprezentuje konfiguraci objektu
 - ▶ mění referenční s.s. vektoru
 - $\mathbf{v}_a = R_{ab}\mathbf{v}_b + \mathbf{p}$
 - ▶ posouvá vektor/s.s. (R, \mathbf{t})
 - $\mathbf{R}_{\text{moved}} = R_{ab}R \quad \mathbf{t}_{\text{moved}} = R_{ab}\mathbf{t} + \mathbf{p}$
- ▶ Případně v homogenních souřadnicích $T_{ab} = \begin{pmatrix} R_{ab} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \in SE(2)$
 - ▶ Special Euclidean Group
 - ▶ reprezentuje translaci i rotaci v jedné matici
 - ▶ $\mathbf{v}_a^H = T_{ab}\mathbf{v}_b^H$
 - ▶ $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$
 - ▶ $T_1T_2 \neq T_2T_1$
 - ▶ Inverze T^{-1}
 - ▶ výpočet inverze matice je výpočetně náročný
 - ▶ $T^{-1} = \begin{pmatrix} R^\top & -R^\top \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$



SE(2) příklad

$$T_{\text{next}} = T_{\text{current}}T_x(\delta_x) \quad T_{\text{next}} = T_{\text{current}}T_\theta(\delta_\theta) \quad T_{\text{next}} = T_{\text{current}}T_x(\delta_x)$$

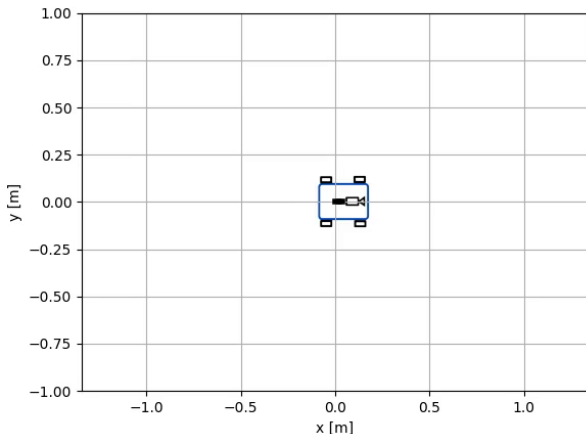
Delta transformace jsou definovány v s.s. robota.



SE(2) příklad

$$T_{\text{next}} = T_x(\delta_x)T_{\text{current}} \quad T_{\text{next}} = T_\theta(\delta_\theta)T_{\text{current}} \quad T_{\text{next}} = T_x(\delta_x)T_{\text{current}}$$

Delta transformace jsou definovány v referenčním s.s.



SE(2) příklad kamera

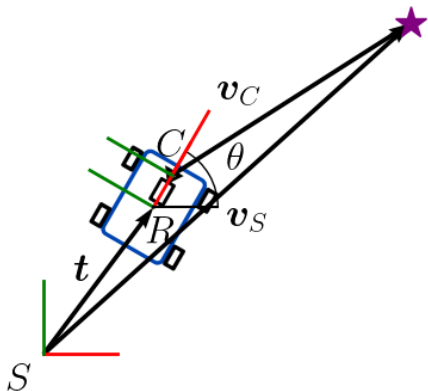
$$T_{SR} = \begin{pmatrix} R(\theta) & t \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{RC} = \begin{pmatrix} I & (0.1 \ 0)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

Jak spočítat v_S ?

$$T_{SC} = T_{SR}T_{RC}$$

$$v_S = T_{SC}v_C$$



Rozšíření do $SO(3)$ a $SE(3)$

▶ $SO(3)$

- ▶ $\det(R) = 1$
- ▶ $RR^T = I$, i.e. $R^{-1} = R^T$
- ▶ $(R_1R_2)R_3 = R_1(R_2R_3)$
- ▶ $R_1R_2 \neq R_2R_1$ obecně

▶ $SE(3)$

- ▶ $\mathbf{v}_a^H = T_{ab}\mathbf{v}_b^H$
- ▶ $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$
- ▶ $T_1T_2 \neq T_2T_1$
- ▶ $T^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$



Jak spočítat $R \in SO(3)$?

- ▶ Skládání rotací kolem os x, y, z

- ▶ $R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

- ▶ $R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$

- ▶ $R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ▶ Z jiných reprezentací rotací



Příklad $SE(3)$

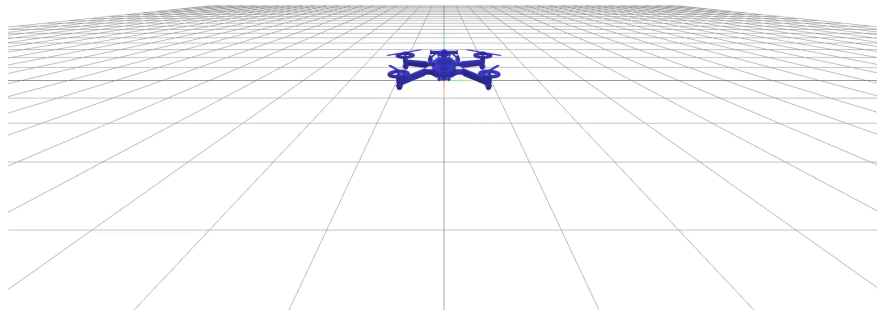
$$T_{\text{next}} = TT_z(\delta_z)$$

$$T_{\text{next}} = TR_z(\theta_z)$$

$$T_{\text{next}} = TR_y(\theta_y)$$

$$T_{\text{next}} = TT_x(\delta_x)$$

$R_y, R_z \in SE(3)$!



Reprezentace osa-úhel

- ▶ $\theta \in \mathbb{R}$, $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$, $\|\hat{\omega}\| = 1$
- ▶ Osa-úhel na R
 - ▶ Rodriguesův vzorec $R(\hat{\omega}, \theta) = I + \sin \theta [\hat{\omega}] + (1 - \cos \theta) [\hat{\omega}]^2$
 - ▶ Skew-symmetric matice $[\omega] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$
 - ▶ Příklad: spočítejte R_z
- ▶ Algoritmus osa-úhel z R
 - ▶ Pokud $R = I$ pak $\theta = 0$ a $\hat{\omega}$ nedefinována.
 - ▶ Pokud $\text{tr } R = -1$ pak $\theta = \pi$ a
 - ▶ $\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{33})}} (r_{13} \quad r_{23} \quad 1 + r_{33})^\top$ pokud $r_{33} \neq -1$
 - ▶ $\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{22})}} (r_{12} \quad 1 + r_{22} \quad r_{32})^\top$ pokud $r_{22} \neq -1$
 - ▶ $\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{11})}} (1 + r_{11} \quad r_{21} \quad r_{31})^\top$ pokud $r_{11} \neq -1$
 - ▶ Jinak $\theta = \arccos(1/2(\text{tr } R - 1))$ a $[\hat{\omega}] = \frac{1}{2\sin \theta}(R - R^\top)$



Exponenciální souřadnice

- ▶ Vektor $\omega \in \mathbb{R}^3$
- ▶ Také se nazývá Eulerův vektor nebo Euler-Rodriguesovy parametry
- ▶ Mapování na reprezentaci osa-úhel:
 - ▶ $\theta = \|\omega\|$
 - ▶ $\hat{\omega} = \frac{\omega}{\theta}$
- ▶ Exponenciální souřadnice na/z R
 - ▶ $R = \exp \omega$: použít Rodriguesův vzorec
 - ▶ $\omega = \log R$: použít algoritmus osa-úhel z R
- ▶ Proč exponenciální?
 - ▶ odpovídá exponenciále/logaritmu matice $[\omega]$
 - ▶ pokud ω je úhlová rychlost, její integrace pro jednu časovou jednotku vede na exponenciálu a konečná orientace je R
 - ▶ numericky citlivá reprezentace pro malé úhly



Kvaterniony

- ▶ $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$, $\|\mathbf{q}\| = 1$
- ▶ Z osa-úhel
 - ▶ $q_w = \cos(\theta/2)$
 - ▶ $\mathbf{q}_{xyz} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \sin(\theta/2)$
- ▶ Z R
 - ▶ $q_w = 1/2\sqrt{1 + \text{tr } R}$
 - ▶ $\mathbf{q}_{xyz} = \frac{1}{4q_w} (r_{32} - r_{23} \quad r_{13} - r_{31} \quad r_{21} - r_{12})^\top$
- ▶ Do R
 - ▶ $R = \exp\left(2 \arccos(q_w) \frac{\mathbf{q}_{xyz}}{\|\mathbf{q}_{xyz}\|}\right)$
 - ▶ tzn. rotuj kolem \mathbf{q}_{xyz} o $\theta = 2 \arccos(q_w)$
- ▶ Kvaterniony nejsou jedinečné, dvě řešení pro stejné R
- ▶ Numericky stabilní



Další reprezentace

- ▶ Eulerovy úhly
 - ▶ tři čísla $\theta_1, \theta_2, \theta_3$
 - ▶ rotace kolem os x, y , nebo z
 - ▶ např. XYX Eulerovy úhly odpovídají $R = R_x(\theta_1)R_y(\theta_2)R_x(\theta_3)$
 - ▶ výpočet Eulerových úhlů z R je často numericky nestabilní a vyžaduje speciální algoritmus pro každou trojici os
- ▶ 6D reprezentace rotace
 - ▶ reprezentované prvními dvěma sloupci R
 - ▶ hladká reprezentace
 - ▶ používá se ve strojovém učení (např. výstup neuronové sítě)



Shrnutí

- ▶ Konfigurace, Konfigurační prostor \mathcal{C} , DoF
- ▶ Rovinný pohyb tuhého tělesa $SO(2)$, $SE(2)$
- ▶ Prostorový pohyb tuhého tělesa $SO(3)$, $SE(3)$
- ▶ Vlastnosti rotační matice v $SO(2)$ a $SO(3)$
- ▶ Reprezentace prostorových rotací
 - ▶ rotační matice
 - ▶ osa-úhel
 - ▶ exponenciální souřadnice
 - ▶ kvaterniony
 - ▶ Eulerovy úhly
 - ▶ 6D reprezentace



Cíl cvičení

- ▶ Začneme implementovat sadu nástrojů pro robotiku
- ▶ <https://robotics-labs.readthedocs.io/>
- ▶ Nástroje pro práci s $SO(2)$, $SE(2)$, $SO(3)$, $SE(3)$
 - ▶ $\exp(\omega)$
 - ▶ $\log(R)$
 - ▶ R^{-1}
 - ▶ ...
- ▶ Příprava
 - ▶ Doporučuje se Linux a Conda
 - ▶ Nainstalujte Condu
 - ▶ Nainstalujte Python IDE (PyCharm, VSCode)

