



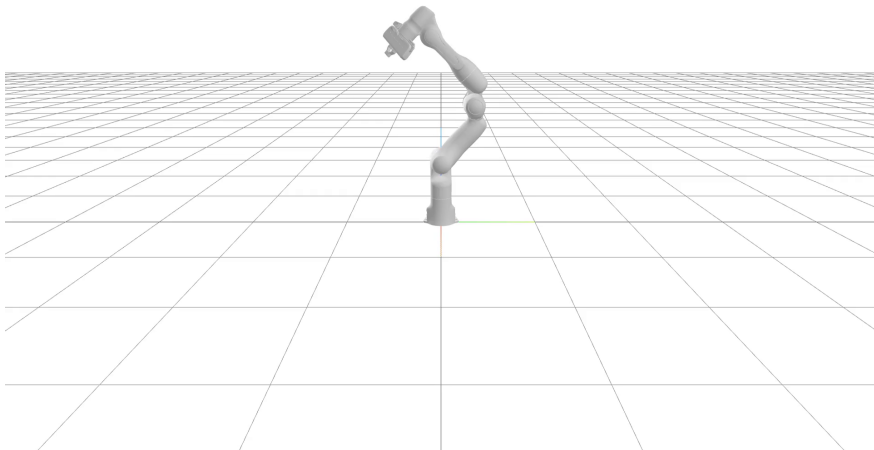
Robotika: Diferenciální Kinematika a Statika

Vladimír Petřík

vladimir.petrík@cvut.cz

07.10.2023

Motivace



Diferenciální Kinematika

- ▶ Víme, jak vypočítat pozici chapadla z konfigurace
 - ▶ přímá kinematika (FK)
 - ▶ $\mathbf{x}(t) = f_{fk}(\mathbf{q}(t))$
 - ▶ $\mathbf{x}(t)$ je vyjádřena v úkolovém prostoru, tzn. $SE(2)$, $SE(3)$, nebo $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ pouze pro pozici
 - ▶ $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^N$ je konfigurace (prostor kloubů)
 - ▶ t je čas
- ▶ Diferenciální kinematika
 - ▶ dává do vztahu rychlost chapadla s rychlostí kloubů
 - ▶ $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \in \mathbb{R}^M$
 - ▶ Jakobián manipulátoru je základem pro analýzy tohoto vztahu



Jakobián

Přímá kinematika

$$\mathbf{x}(t) = f_{\text{fk}}(\mathbf{q}(t))$$

Jakobián:

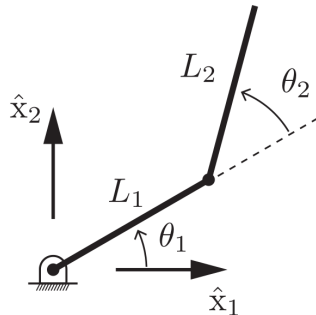
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial f_{\text{fk}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial f_{\text{fk}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ &= J(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

$$J(\mathbf{q}) = \frac{\partial f_{\text{fk}}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$$



Příklad planárního robota

- ▶ FK: $\mathbf{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top \rightarrow (x, y)^\top$
 - ▶ $x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$
 - ▶ $y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$
- ▶ $\dot{\mathbf{x}} = ?$
 - ▶ $\dot{x}_1 = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2)$
 - ▶ $\dot{y}_1 = L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)$
 - ▶ $J(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$
 - ▶ Jacobián závisí na konfiguraci $\mathbf{q}$

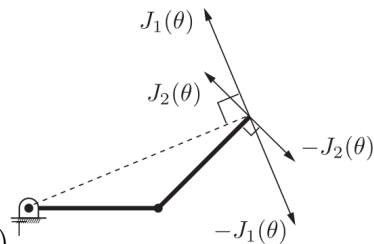


Rozměr jakobiánu

- ▶ $J(\mathbf{q}) = \frac{\partial f_{fk}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
- ▶ M DoF prostoru úkolů
- ▶ N DoF konfiguračního (kloubového) prostoru
- ▶ Redundantní roboti: $N > M$
- ▶ Podaktuovaní roboti: $N < M$
- ▶ 2 DoF robot s translačním prostorem úkolů: 2×2
- ▶ 2 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů: 3×2
- ▶ 5 DoF robot s $SE(2)$ prostorem úkolů: 3×5
- ▶ 6 DoF robot s $SE(3)$ prostorem úkolů: 6×6
- ▶ 7 DoF robot s $SE(3)$ prostorem úkolů: 6×7



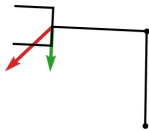
Vlastnosti jakobiánu



- ▶ $J(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} J_1(\mathbf{q}) & J_2(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$
- ▶ První sloupec odpovídá rychlosti chapadla pro $\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$
- ▶ Druhý sloupec odpovídá rychlosti chapadla pro $\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$
- ▶ $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_{\text{tip}} = J_1(\mathbf{q})\dot{\theta}_1 + J_2(\mathbf{q})\dot{\theta}_2$
- ▶ Můžeme generovat rychlost v libovolném směru, pokud $J_1(\mathbf{q})$ a $J_2(\mathbf{q})$ nejsou kolineární
 - ▶ kdy jsou kolineární? např. $\theta_2 = 0$
 - ▶ Jacobián je singulární matice $\rightarrow$ konfigurace se nazývají **singularity**
 - ▶ hodnost jakobiánů není maximální
 - ▶ chapadlo není schopno generovat rychlost v určitém směru



Vizualizace sloupců jakobiánu



Jak vypočítat jakobián numericky

- ▶ Metoda konečné difference

- ▶ $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}, \quad \delta \rightarrow 0$

- ▶ $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_0} & \frac{\partial x}{\partial q_1} & \dots \\ \frac{\partial y}{\partial q_0} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \dots \\ \frac{\partial \theta}{\partial q_0} & \frac{\partial \theta}{\partial q_1} & \dots \end{pmatrix}$

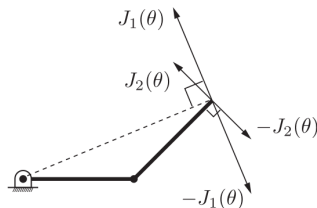
- ▶ $\frac{\partial x}{\partial q_0}(\mathbf{q}) \approx \frac{f_{fk,x}(\mathbf{q}+\boldsymbol{\delta})-f_{fk,x}(\mathbf{q})}{\delta}, \quad \boldsymbol{\delta} = (\delta \quad 0 \quad \dots)^\top$

- ▶ Opakujte pro každý prvek J

- ▶ Pomalý na výpočet, snadno implementovatelný $\rightarrow$ používán při testování



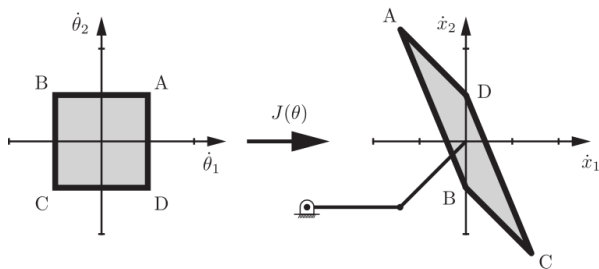
Jak vypočítat jakobián analyticky



- ▶ $J = \begin{pmatrix} J_v & J_w \end{pmatrix}^T$ tzv. translační a rotační část
- ▶ Translační část:
 - ▶ sloupec i ($\mathbf{n}_S$) je kolmý na vektor $\mathbf{t}$, který spojuje kloub i k chapadlu
 - ▶ S - referenční s.s., J - s.s. připojený ke kloubu i , E s.s. chapadla
 - ▶ $\mathbf{t}_{JE}$ - translační část $T_{JE} \in SE(2)$
 - ▶ $\mathbf{n} = R(90)\mathbf{t}_{JE}$ - kolmý vektor
 - ▶ $\mathbf{n}_S = R_{SJ}\mathbf{n}$ - změna referenčního s.s.
 - ▶ pro posuvné klouby: $\mathbf{n}_S = R_{SJ}\mathbf{a}$
 - ▶ $\mathbf{a}$ osa translace
- ▶ Rotační část
 - ▶ 1 pro rotační klouby
 - ▶ 0 pro posuvné klouby

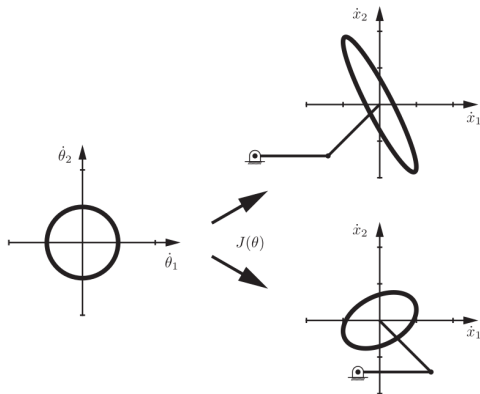
Aplikace jakobiánu - rychlostní limity

- ▶ $\dot{x} = J(q)\dot{q}$
- ▶ Pro každý kloub jsou uvedeny rychlostní limity
 - ▶ nezávislé na konfiguraci
- ▶ Jaké rychlosti můžeme dosáhnout s chapadlem?
 - ▶ závisí na konfiguraci
 - ▶ použijte jakobián k mapování rychlosti kloubového prostoru na rychlost v úkolovém prostoru



Elipsoid manipulovatelnosti

- ▶ Jednotková kružnice v kloubovém rychlostním prostoru, *i.e.* $\|\dot{\mathbf{q}}\| = 1$
- ▶ Mapování přes jakobián do elipsoidu v prostoru chapadla
- ▶ Čím blíže je elipsoid ke kouli, tím snadněji se může chapadlo pohybovat libovolným směrem



Jak vypočítat elipsoid manipulovatelnosti

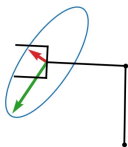
- ▶ Pokud $J(\mathbf{q})$ je ne-singulární
- ▶ Řešením $\mathbf{u}^\top A^{-1} \mathbf{u} = 1$ je elipsoid
 - ▶ vlastní vektory A ukazují směry hlavních os elipsoidu
 - ▶ odmocniny vlastních hodnot jsou délky hlavních os

$$\begin{aligned} 1 &= \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ &= \dot{\mathbf{q}}^\top \dot{\mathbf{q}} \\ &= (J(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{x}})^\top (J(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{x}}) \\ &= \dot{\mathbf{x}}^\top J(\mathbf{q})^{-\top} J(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \dot{\mathbf{x}}^\top \left(J(\mathbf{q}) J(\mathbf{q})^\top \right)^{-1} \dot{\mathbf{x}} \end{aligned}$$



Příklad elipsoidu manipulovatelnosti

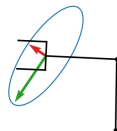
- ▶ 2 DoF robot, jenom translace, $\text{eig}(JJ^T)$



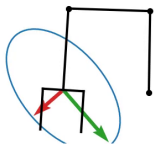
Jak blízko jsme singularitě?

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 7.2522 \\ \mu_2 &= 0.2499\end{aligned}$$

- ▶ Podmíněnost matice JJ^T
 - ▶ $\mu_1 = \frac{\lambda_{\max}(JJ^T)}{\lambda_{\min}(JJ^T)} \geq 1$
 - ▶ λ je vlastní číslo dané matice
 - ▶ čím větší je μ_1 , tím blíže k singularitě jsme
 - ▶ **Preferují se malé μ_1**
- ▶ Objem elipsoidu manipulovatelnosti
 - ▶ čím menší objem, tím blíže k singularitě jsme
 - ▶ $\mu_2 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots} = \det(JJ^T)$
 - ▶ **Upřednostňují se velké μ_2**



Redundantní roboti a singularity



Nulový prostor jakobiánu [Null-space]

- ▶ $\text{Null}(A) = \ker(A) = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
- ▶ Najdi $\dot{\mathbf{q}}$ tak, aby $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$
 - ▶ $\dot{\mathbf{q}}_{\text{null}} \in \ker(J)$
 - ▶ existuje více řešení, pokud máme víc stupňů volnosti



Analýza statiky

- ▶ Zachování energie: (výkon v kloubech) = (výkon pro pohyb robota) + (výkon v chapadle)
- ▶ Statická rovnováha: k pohybu robota se nepoužívá žádná energie, tj. žádný pohyb
 - ▶ (výkon v kloubech) = (výkon v chapadle)
 - ▶ $\boldsymbol{\tau}^\top \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}^\top \dot{\mathbf{x}}$
 - ▶ $\boldsymbol{\tau}$ kloubové momenty/síly
 - ▶ $\dot{\mathbf{q}}$ kloubové rychlosti
 - ▶ $\mathbf{F}$ síla v chapadle
 - ▶ $\dot{\mathbf{x}}$ rychlost chapadla
 - ▶ $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$
 - ▶ $\boldsymbol{\tau}^\top = \mathbf{F}^\top \mathbf{J}(\mathbf{q})$
 - ▶ $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^\top \mathbf{F}$



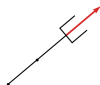
Statika - kompenzace vnější síly

- ▶ Zvažme vnější sílu působící na chapadlo $-\mathbf{F}$.
- ▶ Jak vypočítat kloubové momenty tak, aby byl robot statický?
 - ▶ $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^\top \mathbf{F}$
 - ▶ koncový efektor potřebuje generovat sílu $\mathbf{F}$, aby kompenzoval vnější $-\mathbf{F}$
 - ▶ tato rovnice předpokládá, že gravitace na robota nepůsobí
 - ▶ $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} + \boldsymbol{\tau}_g$
 - ▶ $\boldsymbol{\tau}_g$ kompenzuje gravitaci působící na robota
 - ▶ U robota Panda můžeme přímo ovládat $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$



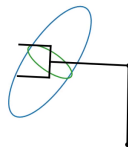
Síla způsobená danými momenty

- ▶ Pokud inverze J existuje (kdy?)
 - ▶ $\mathbf{F} = J(\mathbf{q})^{-\top} \boldsymbol{\tau}$
- ▶ Redundantní roboti
 - ▶ i pro pevné chapadlo můžeme mít vnitřní pohyb
 - ▶ předpoklad statické rovnováhy není platný $\rightarrow$ potřeba dynamiky
- ▶ Podaktuování roboti
 - ▶ pevný koncový efektor znehbybní robota
 - ▶ robot nemůže aktivně generovat síly v nulovém prostoru $J^\top$:
 $\ker(J^\top) = \{\mathbf{F} \mid J^\top \mathbf{F} = \mathbf{0}\}$
 - ▶ robot však může odolávat vnější síle v nulovém prostoru, aniž by se pohnul
 - ▶ červená šipka ukazuje nulový prostor
- ▶ Singularity (čtvercová J , ale inverze neexistuje)
 - ▶ nenulový nulový prostor



Silový elipsoid

- ▶ Jak snadné je generovat sílu v daném směru.
- ▶ Eigen analýza $(JJ^T)^{-1}$
 - ▶ Modře - manipulační elipsoid (tj. JJ^T)
 - ▶ Zeleně - silový elipsoid (tj. $(JJ^T)^{-1}$)
- ▶ Snadný pohyb v daném směru $\rightarrow$ obtížné kompenzovat sílu v tomto směru
- ▶ Blízko singularitě:
 - ▶ obsah elipsoidu manipulovatelnosti $\rightarrow 0$
 - ▶ obsah silového elipsoidu $\rightarrow \infty$



- ▶ Diferenciální kinematika
 - ▶ Jakobián a jeho vlastnosti
 - ▶ Jak vypočítat jakobián
 - ▶ Manipulační elipsoid
 - ▶ Jak měřit vzdálenost k singularitě
- ▶ Statika
 - ▶ Statický rovnovážný vztah kloubových momentů/sil a sil/momentů chapadla
 - ▶ Silový elipsoid

- ▶ Implementace výpočtu jakobiánu pro planární manipulátor
 - ▶ Metoda konečné difference
 - ▶ Analyticky
- ▶ Generace pohybu v nulovém prostoru