



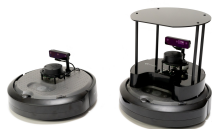
# Robotika: Reprezentace pohybu

Vladimír Petřík

[vladimir.petrík@cvut.cz](mailto:vladimir.petrík@cvut.cz)

22.09.2025

# Co je to robot?



Mobilní robot, UGV -  
unmanned ground vehicle



Létající roboti (např. drony)



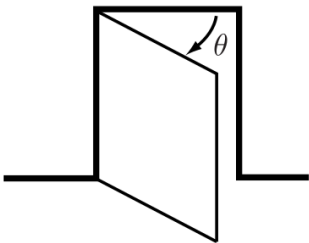
Kráčející roboti (např.  
humanoidi)



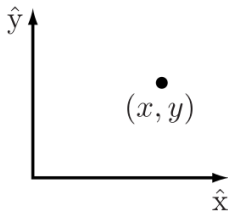
**Manipulátory** (např. Franka  
Emika Panda)

# Konfigurace robota

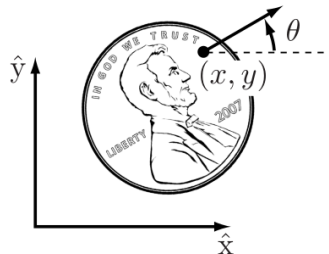
- Kompletní specifikace každého bodu na robotovi.



Konfigurace je popsána  
úhlem  $\theta$ .



Bod v rovině je popsán  
dvěma souřadnicemi.



Konfigurace planárního  
tuhého tělesa se skládá z  
pozice a orientace.

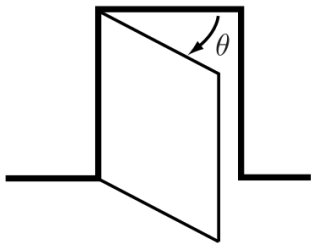
# Stupně volnosti (DoF)

- ▶ Minimální počet souřadnic potřebných k reprezentaci konfigurace.
  - ▶ dveře: 1
  - ▶ bod v rovině: 2
  - ▶ tuhé těleso v rovině: 3
  - ▶ manipulátory: od 1 (např. rotační stůl) do desítek (humanoidi)
- ▶ Určení DoF
  - ▶ (součet volností bodů) - (počet nezávislých omezení)
  - ▶ Tuhé těleso - jak je definováno?
    - ▶ Vzdálenost mezi libovolnými dvěma danými body na tuhém tělese zůstává konstantní
    - ▶ Příklad: omezení pro  $N$  bodů rovinného tuhého objektu
  - ▶ U některých robotů je určení počtu stupňů volnosti netriviální

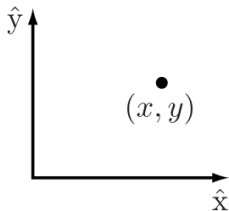


## Konfigurační prostor - $\mathcal{C}$

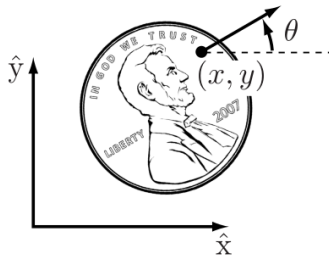
- ▶  $N$ -rozměrný prostor ( $N$  odpovídá počtu stupňů volnosti)
- ▶ Každý bod konfiguračního prostoru odpovídá jedné konfiguraci
- ▶ Obsahuje všechny možné konfigurace robota



$\mathcal{C} : \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$  nebo  
 $\mathcal{C} : \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$



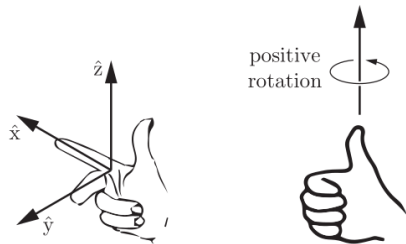
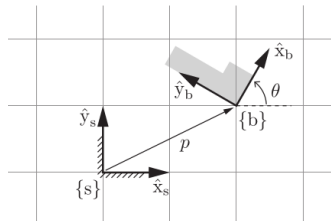
$\mathcal{C} : \mathbb{R}^2$



$\mathcal{C} : \mathbb{R}^2 \times \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$  proč ne  
 $\mathbb{R}^3$ ?

# Pohyb tuhého tělesa v rovině

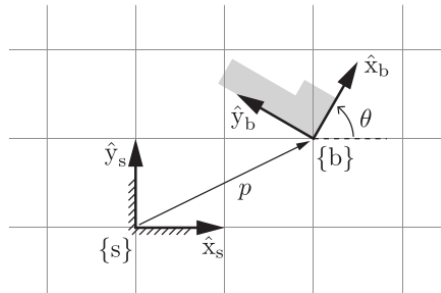
- ▶ K tuhému tělu připevníme s.s. (frame)  $\{b\}$ 
  - ▶ Často se umísťuje do těžiště (ale není vyžadováno)
  - ▶ Lze umístit mimo tělo
  - ▶ S.s.  $\{b\}$  se nepohybuje vzhledem k tělu
- ▶ Vybereme pevný **referenční** s.s.
  - ▶ střed místnosti
  - ▶ roh stolu
  - ▶ základna manipulátoru
- ▶ Všechny s.s. jsou pravotočivé



# Pohyb tuhého tělesa v rovině

- Konfigurace objektu je určena
  - pozicí s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
  - orientací s.s. objektu vzhledem k referenčnímu s.s.
- Pozice s.s. objektu
  - $\mathbf{p} = p_x \hat{\mathbf{x}}_s + p_y \hat{\mathbf{y}}_s \in \mathbb{R}^2$
  - Pokud je referenční s.s. jasný z kontextu:  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)^\top$
- Orientace
  - Úhel  $\theta \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$
  - Vhodné pro další výpočty:  
 $\hat{\mathbf{x}}_b = +\cos \theta \hat{\mathbf{x}}_s + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}_s$   
 $\hat{\mathbf{y}}_b = -\sin \theta \hat{\mathbf{x}}_s + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}_s$

$$\text{Rotační matice } R = (\hat{\mathbf{x}}_b, \hat{\mathbf{y}}_b) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



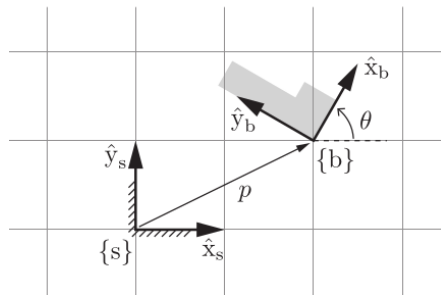
## $SO(2)$

- ▶  $R$  má 4 čísla, ale pouze 1 DoF - 3 nezávislá omezení
  - ▶ oba sloupce jsou jednotkové vektory
  - ▶ sloupce jsou navzájem ortogonální
- ▶ Množina všech rotačních matic je  $SO(2)$ , tzn.  $R \in SO(2)$ 
  - ▶ Special Orthogonal group
  - ▶  $\det(R) = 1$
  - ▶  $RR^T = I$ , i.e.  $R^{-1} = R^T$
  - ▶  $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$
  - ▶ **Pro**  $SO(2)$   $R_1 R_2 = R_2 R_1$
- ▶ Použití rotační matice
  - ▶ pro reprezentaci orientace s.s.
  - ▶ pro změnu referenčního s.s., ve kterém je vektor reprezentován
  - ▶ pro otočení vektoru nebo s.s.



## $SE(2)$

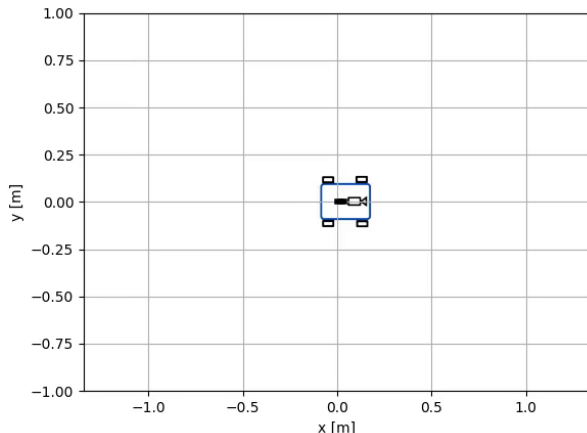
- ▶ Pár  $(R_{ab}, \mathbf{p})$ 
  - ▶ reprezentuje konfiguraci objektu
  - ▶ mění referenční s.s. vektoru
$$\mathbf{v}_a = R_{ab}\mathbf{v}_b + \mathbf{p}$$
  - ▶ posouvá vektor/s.s.  $(R, \mathbf{t})$ 
$$\mathbf{R}_{\text{moved}} = R_{ab}R \quad \mathbf{t}_{\text{moved}} = R_{ab}\mathbf{t} + \mathbf{p}$$
- ▶ Případně v homogenních souřadnicích  $T_{ab} = \begin{pmatrix} R_{ab} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \in SE(2)$ 
  - ▶ Special Euclidean Group
  - ▶ reprezentuje translaci i rotaci v jedné matici
  - ▶  $\mathbf{v}_a^H = T_{ab}\mathbf{v}_b^H$
  - ▶  $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$
  - ▶  $T_1T_2 \neq T_2T_1$
  - ▶ Inverze  $T^{-1}$ 
    - ▶ výpočet inverze matice je výpočetně náročný
    - ▶ 
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R^\top & -R^\top \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$



## SE(2) příklad

$$T_{\text{next}} = T_{\text{current}} T_x(\delta_x) \quad T_{\text{next}} = T_{\text{current}} T_\theta(\delta_\theta) \quad T_{\text{next}} = T_{\text{current}} T_x(\delta_x)$$

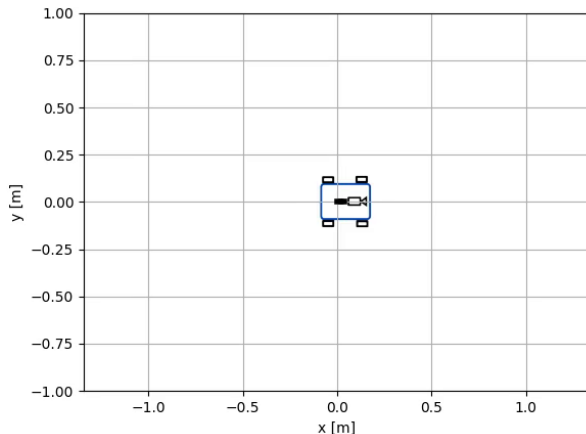
Delta transformace jsou definovány v s.s. robota.



## SE(2) příklad

$$T_{\text{next}} = T_x(\delta_x)T_{\text{current}} \quad T_{\text{next}} = T_\theta(\delta_\theta)T_{\text{current}} \quad T_{\text{next}} = T_x(\delta_x)T_{\text{current}}$$

Delta transformace jsou definovány v referenčním s.s.



## $SE(2)$ příklad kamera

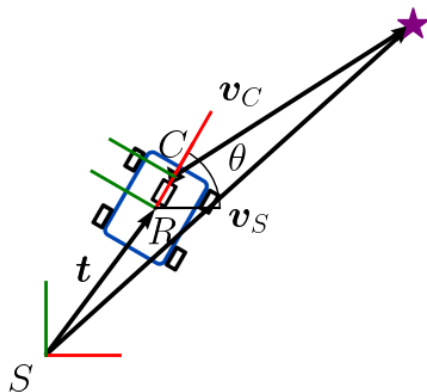
$$T_{SR} = \begin{pmatrix} R(\theta) & t \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{RC} = \begin{pmatrix} I & (0.1 \ 0)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

Jak spočítat  $\mathbf{v}_S$ ?

$$T_{SC} = T_{SR}T_{RC}$$

$$\mathbf{v}_S = T_{SC}\mathbf{v}_C$$



# Rozšíření do $SO(3)$ a $SE(3)$

## ► $SO(3)$

- $\det(R) = 1$
- $RR^\top = I$ , i.e.  $R^{-1} = R^\top$
- $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$
- $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$  obecně

## ► $SE(3)$

- $\mathbf{v}_a^H = T_{ab} \mathbf{v}_b^H$
- $(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$
- $T_1 T_2 \neq T_2 T_1$
- $T^{-1} = \begin{pmatrix} R^\top & -R^\top \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$



## Jak spočítat $R \in SO(3)$ ?

- ▶ Skládání rotací kolem os  $x, y, z$

- ▶  $R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

- ▶  $R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$

- ▶  $R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

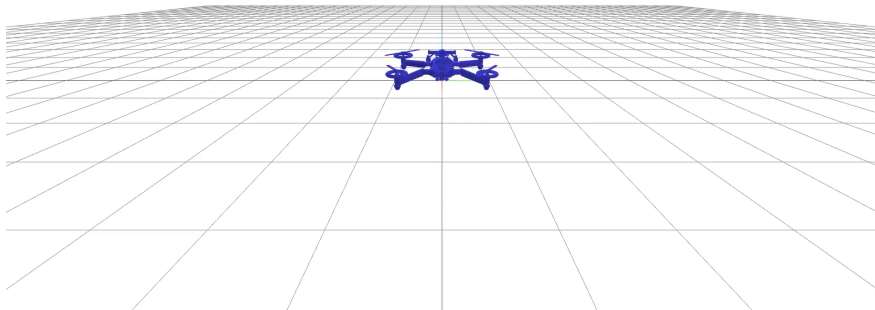
- ▶ Z jiných reprezentací rotací



## Příklad $SE(3)$

$$T_{\text{next}} = TT_z(\delta_z) \quad T_{\text{next}} = TR_z(\theta_z) \quad T_{\text{next}} = TR_y(\theta_y) \quad T_{\text{next}} = TT_x(\delta_x)$$

$R_y, R_z \in SE(3)!$



# Reprezentace osa-úhel

- ▶  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|\hat{\omega}\| = 1$
- ▶ Osa-úhel na  $R$ 
  - ▶ Rodriguesův vzorec  $R(\hat{\omega}, \theta) = I + \sin \theta [\hat{\omega}] + (1 - \cos \theta) [\hat{\omega}]^2$
  - ▶ Skew-symmetric matice  $[\omega] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$
  - ▶ Příklad: spočítejte  $R_z$
- ▶ Algoritmus osa-úhel z  $R$ 
  - ▶ Pokud  $R = I$  pak  $\theta = 0$  a  $\hat{\omega}$  nedefinována.
  - ▶ Pokud  $\text{tr } R = -1$  pak  $\theta = \pi$  a
    - ▶  $\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{33})}} (r_{13} \quad r_{23} \quad 1 + r_{33})^\top$  pokud  $r_{33} \neq -1$
    - ▶  $\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{22})}} (r_{12} \quad 1 + r_{22} \quad r_{32})^\top$  pokud  $r_{22} \neq -1$
    - ▶  $\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{11})}} (1 + r_{11} \quad r_{21} \quad r_{31})^\top$  pokud  $r_{11} \neq -1$
  - ▶ Jinak  $\theta = \arccos(1/2(\text{tr } R - 1))$  a  $[\hat{\omega}] = \frac{1}{2\sin \theta}(R - R^\top)$



# Exponenciální souřadnice

- ▶ Vektor  $\omega \in \mathbb{R}^3$
- ▶ Také se nazývá Eulerův vektor nebo Euler-Rodriguesovy parametry
- ▶ Mapování na reprezentaci osa-úhel:
  - ▶  $\theta = \|\omega\|$
  - ▶  $\hat{\omega} = \frac{\omega}{\theta}$
- ▶ Exponenciální souřadnice na/z  $R$ 
  - ▶  $R = \exp \omega$ : použít Rodriguesův vzorec
  - ▶  $\omega = \log R$ : použít algoritmus osa-úhel z  $R$
- ▶ Proč exponenciální?
  - ▶ odpovídá exponenciále/logaritmu matice  $[\omega]$
  - ▶ pokud  $\omega$  je úhlová rychlost, její integrace pro jednu časovou jednotku vede na exponenciálu a konečná orientace je  $R$
  - ▶ numericky citlivá reprezentace pro malé úhly



# Kvaterniony

- ▶  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$ ,  $\|\mathbf{q}\| = 1$
- ▶ Z osa-úhel
  - ▶  $q_w = \cos(\theta/2)$
  - ▶  $\mathbf{q}_{xyz} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \sin(\theta/2)$
- ▶ Z  $R$ 
  - ▶  $q_w = 1/2\sqrt{1 + \text{tr } R}$
  - ▶  $\mathbf{q}_{xyz} = \frac{1}{4q_w} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} & r_{13} - r_{31} & r_{21} - r_{12} \end{pmatrix}^\top$
- ▶ Do  $R$ 
  - ▶  $R = \exp\left(2 \arccos(q_w) \frac{\mathbf{q}_{xyz}}{\|\mathbf{q}_{xyz}\|}\right)$
  - ▶ tzn. rotuj kolem  $\mathbf{q}_{xyz}$  o  $\theta = 2 \arccos(q_w)$
- ▶ Kvaterniony nejsou jedinečné, dvě řešení pro stejné  $R$
- ▶ Numericky stabilní



## Další reprezentace

- ▶ Eulerovy úhly
  - ▶ tři čísla  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$
  - ▶ rotace kolem os  $x, y$ , nebo  $z$
  - ▶ např.  $XYX$  Eulerovy úhly odpovídají  $R = R_x(\theta_1)R_y(\theta_2)R_x(\theta_3)$
  - ▶ výpočet Eulerových úhlů z  $R$  je často numericky nestabilní a vyžaduje speciální algoritmus pro každou trojici os
- ▶ 6D reprezentace rotace
  - ▶ reprezentované prvními dvěma sloupci  $R$
  - ▶ hladká reprezentace
  - ▶ používá se ve strojovém učení (např. výstup neuronové sítě)



# Shrnutí

- ▶ Konfigurace, Konfigurační prostor  $\mathcal{C}$ , DoF
- ▶ Rovinný pohyb tuhého tělesa  $SO(2)$  ,  $SE(2)$
- ▶ Prostorový pohyb tuhého tělesa  $SO(3)$  ,  $SE(3)$
- ▶ Vlastnosti rotační matice v  $SO(2)$  a  $SO(3)$
- ▶ Reprezentace prostorových rotací
  - ▶ rotační matice
  - ▶ osa-úhel
  - ▶ exponenciální souřadnice
  - ▶ kvaterniony
  - ▶ Eulerovy úhly
  - ▶ 6D reprezentace



# Cíl cvičení

- ▶ Začneme implementovat sadu nástrojů pro robotiku
- ▶ <https://robotics-labs.readthedocs.io/>
- ▶ Nástroje pro práci s  $SO(2)$  ,  $SE(2)$  ,  $SO(3)$  ,  $SE(3)$ 
  - ▶  $\exp(\omega)$
  - ▶  $\log(R)$
  - ▶  $R^{-1}$
  - ▶ ...
- ▶ Příprava
  - ▶ Doporučuje se Linux a MiniConda
  - ▶ Nainstalujte MiniCondu
  - ▶ Nainstalujte Python IDE (PyCharm, VSCode)

