



Robotika: Přímá kinematika otevřených kinematických řetězců

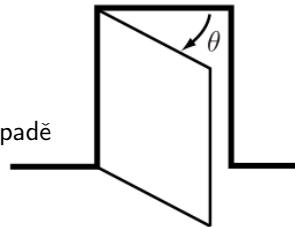
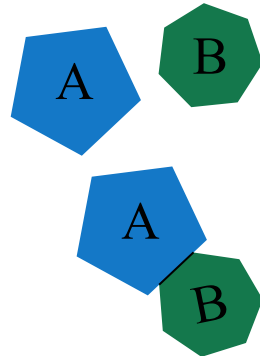
Vladimír Petřík

vladimir.petrík@cvut.cz

29.09.2025

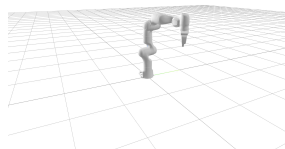
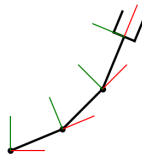
Spojení dvou tuhých těles

- ▶ Kolik DoF má systém dvou rovinných tuhých těles? $(3 + 3)$ DoF
- ▶ Kolik stupňů volnosti, když je slepíme/spojíme dohromady? 3 DoF
- ▶ **Pevný [fixed] kloub**
 - ▶ spojuje dvě pevná tělesa dohromady
 - ▶ odstraní 3 DoF v rovinném případě a 6 DoF v prostorovém případě
- ▶ Kolik DoF pro dveře, pokud by tam nebyl kloub?
- ▶ **Otočný [revolute] kloub**
 - ▶ spojuje dvě pevná tělesa dohromady
 - ▶ má 1 DoF
 - ▶ odstraní 2 DoF v rovinném případě a 5 DoF v prostorovém případě



Robotický manipulátor

- ▶ Tvoření rameny (obvykle tuhá tělesa)
- ▶ **Dvě** ramena jsou spojena různými klouby
- ▶ Pohony dodávají kroutící moment/sílu, aby způsobily pohyby ramena
- ▶ K některým ramenům je připojeno chapadlo

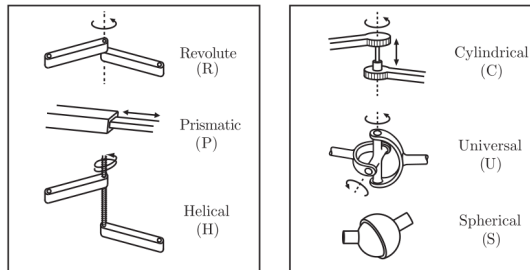


Posuvný [prismatic] kloub

- ▶ Také lineární kloub
- ▶ Pouze posuvný pohyb v 1 DoF
- ▶ Odstraňuje 2 DoF v rovinném případě a 5 DoF v prostorovém případě



Typy kloubů



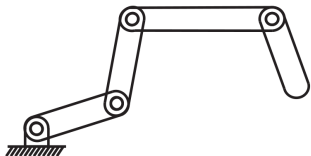
Omezení mezi dvěma tuhými tělesy

Typ kloubu	DoF	Rovinný	Prostorový
R	1	2	5
P	1	2	5
H	1	-	5
C	2	-	4
U	2	-	4
S	3	-	3

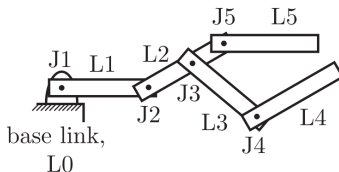


Otevřený/uzavřený kinematický řetězec

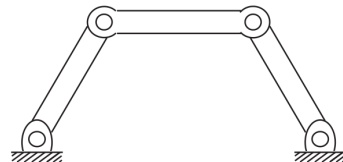
- ▶ Otevřené kinematické řetězce: žádné smyčky ve struktuře
- ▶ Uzavřené kinematické řetězce obsahují smyčky



Otevřený - sekvenční
struktura

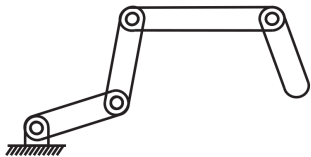


Otevřený - stromová
struktura

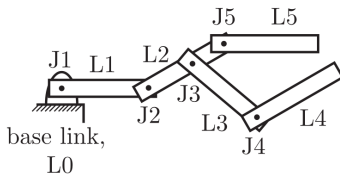


Uzavřený

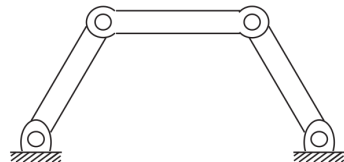
Kolik DoF?



Snadné: 4 DoF



Snadné: 5 DoF



Obtížnější: 1 DoF

Grüblerův vzorec

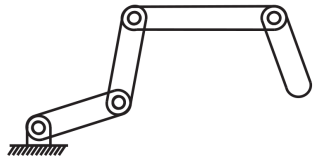
- ▶
$$n_{\text{DoF}} = m(L - 1) - \sum_{i=1}^N c_i = m(L - 1 - N) + \sum_{i=1}^N f_i$$
- ▶ L je počet ramen včetně země
- ▶ N je počet kloubů
- ▶ m je DoF tuhého tělesa (3 pro rovinné, 6 pro prostorové)
- ▶ c_i počet omezení poskytovaných kloubem i
- ▶ f_i DoF kloubu i
- ▶ $f_i + c_i = m$
- ▶ Funguje pro *obecné* případy, selhává ale v určitých konfiguracích - když omezení kloubů nejsou nezávislá



Aplikace Grüblerova vzorce

$$n_{\text{DoF}} = m(L - 1 - N) + \sum_{i=1}^N f_i$$

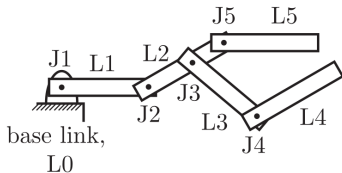
m - DoF tělesa, L - počet ramen, N - počet kloubů, f_i - DoF kloubu



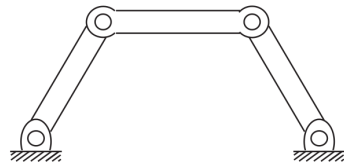
$$3(5 - 1 - 4) + (1 + 1 + 1 + 1) = 4 \text{ DoF}$$

$$3(6 - 1 - 5) + (1 + 1 + 1 + 1 + 0) = 4 \text{ DoF}$$

pokud přidáme pevný spoj



$$3(6 - 1 - 5) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 5 \text{ DoF}$$



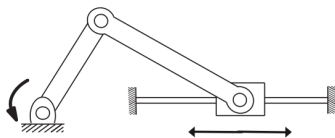
$$3(4 - 1 - 4) + (1 + 1 + 1 + 1) = 1 \text{ DoF}$$

$$3(5 - 1 - 5) + (1 + 1 + 1 + 1 + 0) = 1 \text{ DoF}$$

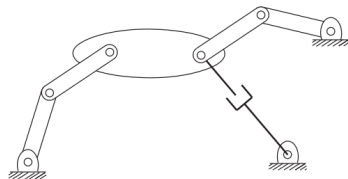
(jsou-li dvě země spojeny pevným kloubem)



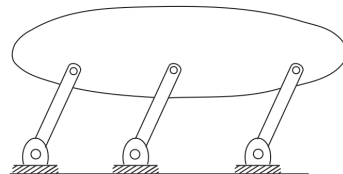
Aplikace Grüblerova vzorce



$$3(4 - 1 - 4) + (1 + 1 + 1 + 1) = 1 \text{ DoF}$$



$$3(8 - 1 - 9) + (9) = 3 \text{ DoF}$$

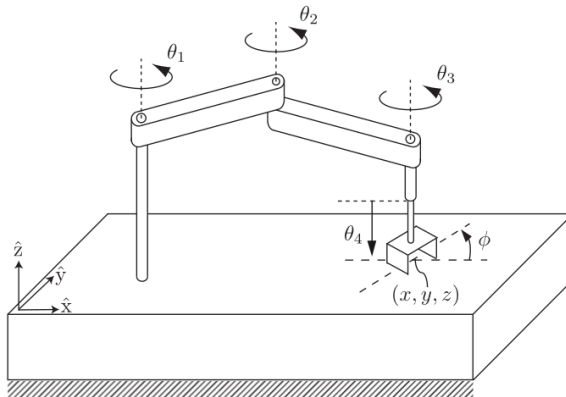


$$3(5 - 1 - 6) + (6) = 0 \text{ DoF}$$

Selhání: 1 DoF Grüblerův vzorec funguje pro nezávislá omezení kloubů.



Aplikace Grüblerova vzorce



$$6 (5 - 1 - 4) + (1 + 1 + 1 + 1) = 4 \text{ DoF}$$



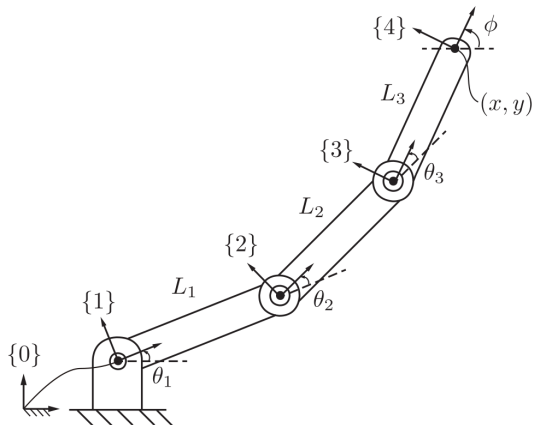
Kinematické úlohy

- ▶ Přímá kinematika [Forward kinematics / FK]
 - ▶ výpočet polohy/orientace chapadla z kloubových souřadnic
 - ▶ $f_{fk} : \mathbf{q} \rightarrow T_{ee}$
 - ▶ $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$, kde N je počet kloubů
 - ▶ $T_{ee} \in SE(2)/SE(3)$
- ▶ Inverzní kinematika (IK)
 - ▶ výpočet kloubových souřadnic z polohy/orientace chapadla
 - ▶ $f_{ik} : T_{ee} \rightarrow \mathbf{q}$
 - ▶ $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$, kde N je počet kloubů
 - ▶ $T_{ee} \in SE(2)/SE(3)$



Přímá kinematika

Cíl: spočítat FK, tzn. x, y, ϕ z $\mathbf{q} = (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3)^\top$



Počátek s.s. {0} je umístěn v ose rotace prvního kloubu.

Řešení

- ▶ Trigonometrické řešení:

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

- ▶ obtížnější vypočítat pro prostorové manipulátory
- ▶ Řešení založené na transformacích:

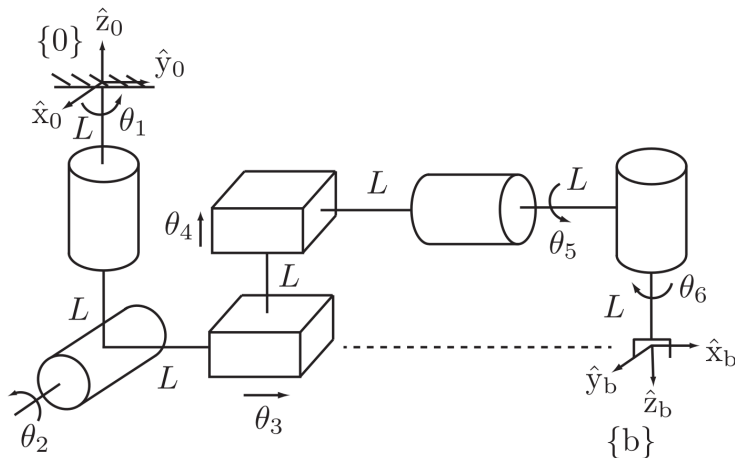
$$T_{04} = R(\theta_1)T_x(L_1)R(\theta_2)T_x(L_2)R(\theta_3)T_x(L_3)$$

$$R \in SE(2), T_x \in SE(2)$$

- ▶ systematictější řešení
- ▶ jak získat x, y, ϕ z $T = T_{04}$?
- ▶ $x = T_{13}, \quad y = T_{23}, \quad \phi = \text{atan2}(T_{21}, T_{22})$



Přímá kinematika pro prostorového robota

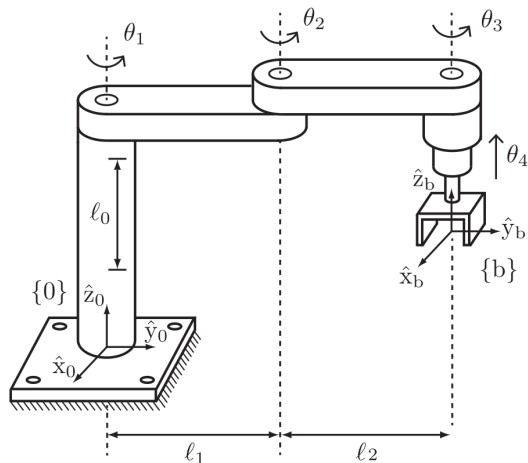


$$T_{0b} =$$

$$R_z(\theta_1)T_z(-L)R_x(\theta_2)T_y(L)T_y(\theta_3)T_z(L + \theta_4)T_y(L)R_y(\theta_5)R_z(-\theta_6)T_z(L)R_z(\pi/2)R_x(\pi)$$



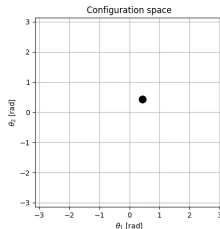
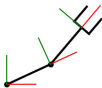
Přímá kinematika pro prostorového robota



$$T_{0b} = T_z(\ell_0)R_z(\theta_1)T_y(\ell_1)R_z(\theta_2)T_y(\ell_2)R_z(\theta_3)T_z(-\theta_4)$$

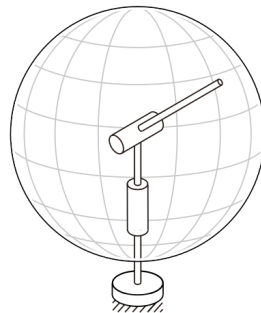
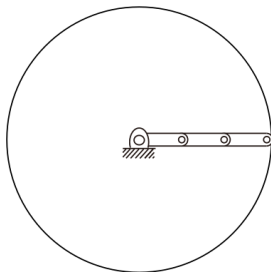
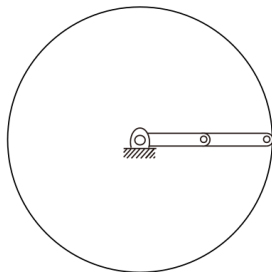
Konfigurační prostor a prostor úkolů

- ▶ Konfigurační prostor pro 2 DoF robota
 - ▶ každý bod odpovídá jedné konfiguraci
- ▶ Prostor úkolů
 - ▶ prostor, ve kterém lze přirozeně vyjádřit úkol robota (nezávislý na robotovi)
 - ▶ bod v prostoru úloh lze dosáhnout několika konfiguracemi
 - ▶ např. manipulace prostorovým objektem, prostor úkolů je $SE(3)$
 - ▶ např. kreslení na papír, prostor úkolů je $\mathbb{R}^2$



Pracovní prostor robota

- ▶ Specifikace konfigurací, kterých může chapadlo robota dosáhnout
- ▶ Záleží na struktuře robota
- ▶ Orientace chapadla je často ignorována (ale záleží na úloze)



- ▶ Universal Robot Description Format
- ▶ XML soubor, který popisuje kinematiku, geometrii a dynamiku robotů
- ▶ Používá se v robotickém operačním systému (ROS)
- ▶ Omezeno na otevřené kinematické řetězce (včetně stromových struktur)
- ▶ Robot je popsán pomocí:
 - ▶ Ramen (tuhá tělesa)
 - ▶ Kloubů (spojuje dvě ramena)

URDF - Ramena

- Proč potřebujeme vizuální a kolizní model? Link origin

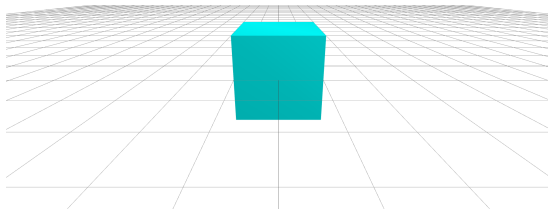
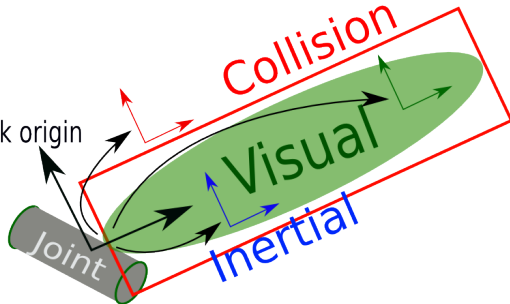
- RPY: Roll Pitch Yaw

$$R = R_z(\text{yaw})R_y(\text{pitch})R_x(\text{roll})$$

```
<robot name="robot">
  <link name="link">
    <inertial>
      <origin xyz="0 0 0.5" rpy="0 0 0"/>
      <mass value="1"/>
      <inertia ixx="100" ixy="0" ixz="0" iyy="100" iyz="0" izz="100"/>
    </inertial>

    <visual>
      ...
    </visual>

    <collision>
      ...
    </collision>
  </link>
</robot>
```



URDF - Ramena

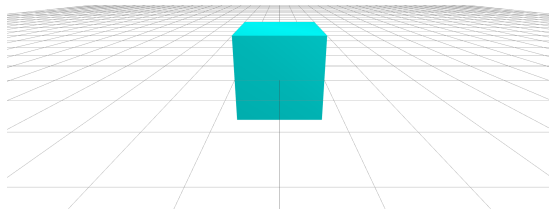
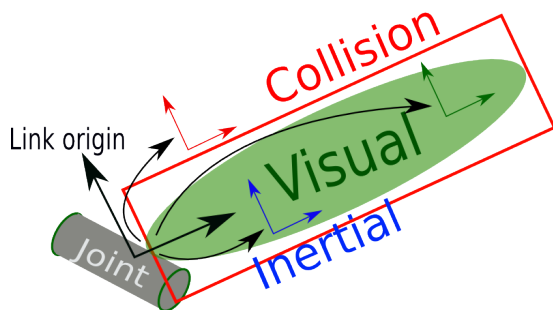
- ▶ Proč potřebujeme vizuální a kolizní model?
- ▶ RPY: Roll Pitch Yaw

$$R = R_z(\text{yaw})R_y(\text{pitch})R_x(\text{roll})$$

```
<robot name="robot">
  <link name="link">
    <inertial>
      ...
    </inertial>

    <visual>
      <origin xyz="0 0 0" rpy="0 0 0"/>
      <geometry>
        <box size="1 1 1"/>
      </geometry>
      <material name="Cyan">
        <color rgba="0 1.0 1.0 1.0"/>
      </material>
    </visual>

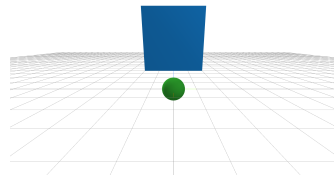
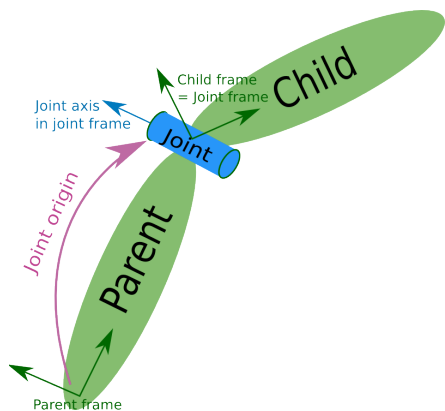
    <collision>
      <origin xyz="0 0 0" rpy="0 0 0"/>
      <geometry>
        <cylinder radius="1" length="0.5"/>
      </geometry>
    </collision>
  </link>
</robot>
```



URDF - Klouby

```
<link name="l0"></link> <!-- sphere -->
<link name="l1"></link> <!-- box -->

<joint name="j0" type="fixed">
  <origin xyz="0 0 1" rpy="0 0 0"/>
  <parent link="l0"/>
  <child link="l1"/>
</joint>
```

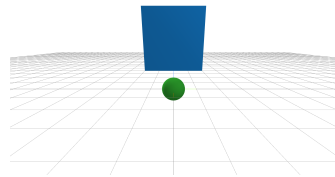
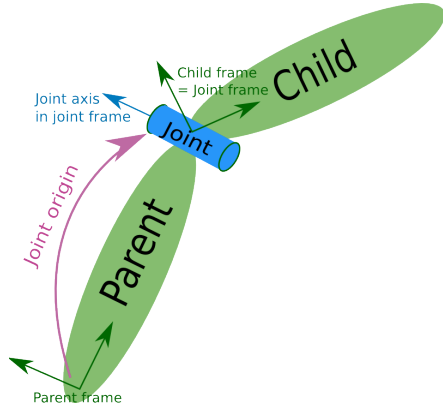


URDF - Klouby

```
<link name="l0"></link> <!-- sphere -->
<link name="l1"></link> <!-- box -->

<joint name="j0" type="revolute">
  <origin xyz="0 0 1" rpy="0 0 0"/>
  <parent link="l0"/>
  <child link="l1"/>
  <axis xyz="0 0 1"/>
  <limit effort="30" velocity="1.0" lower="-3.14" upper="3.14" />
</joint>
```

- ▶ Může být horní limit menší než π ?
- ▶ Může být horní limit větší než π ?
- ▶ Další typy kloubů: continuous, planar, floating

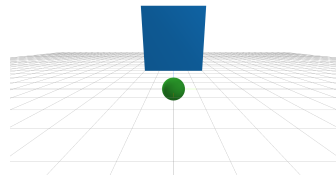
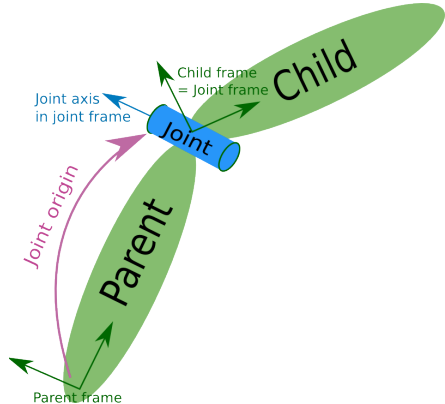


URDF - Klouby

```
<link name="l0"></link> <!-- sphere -->
<link name="l1"></link> <!-- box -->

<joint name="j0" type="revolute">
  <origin xyz="0 0 1" rpy="0 0 0"/>
  <parent link="l0"/>
  <child link="l1"/>
  <axis xyz="1 0 0"/>
  <limit effort="30" velocity="1.0" lower="-3.14" upper="3.14" />
</joint>
```

- ▶ Může být horní limit menší než π ?
- ▶ Může být horní limit větší než π ?
- ▶ Další typy kloubů: continuous, planar, floating

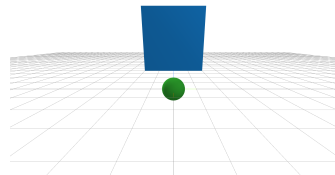
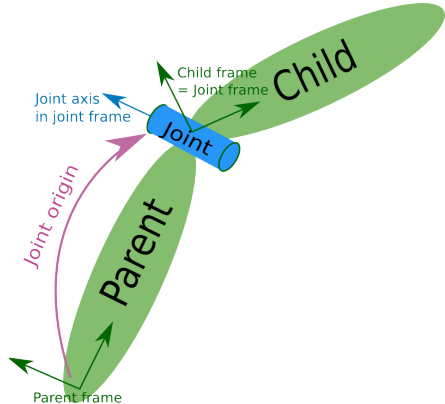


URDF - Klouby

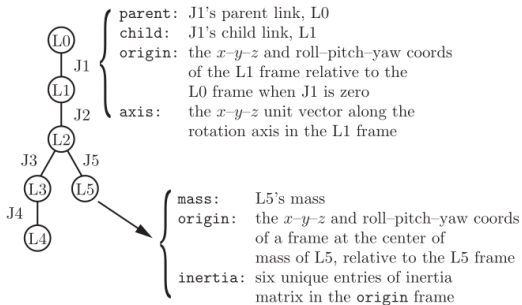
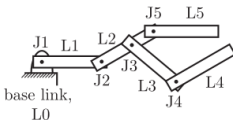
```
<link name="l0"></link> <!-- sphere -->  
<link name="l1"></link> <!-- box -->
```

```
<joint name="joint0" type="prismatic">  
  <origin xyz="0 0 1" rpy="0 0 0"/>  
  <parent link="l0"/>  
  <child link="l1"/>  
  <axis xyz="0 1 0"/>  
  <limit effort="30" velocity="1.0" lower="-1.0" upper="1.0" />  
</joint>
```

- ▶ Může být horní limit menší než π ?
- ▶ Může být horní limit větší než π ?
- ▶ Další typy kloubů: continuous, planar, floating



URDF příklad



Shrnutí

- ▶ Robotický manipulátor (klouby, ramena, chapadlo)
- ▶ Typy kloubů (DoF, omezení)
- ▶ Otevřený/uzavřený kinematický řetězec
- ▶ Grüblerův vzorec
- ▶ Přímá/inverzní kinematika
- ▶ Konfigurační prostor / Úkolový prostor / Pracovní prostor
- ▶ URDF



Cvičení

- ▶ Implementujte FK pro rovinný manipulátor
- ▶ Vytvořte si svůj vlastní model v URDF

