



Robotika: Denavit–Hartenberg notace

Vladimír Petřík

vladimir.petrík@cvut.cz

20.10.2023

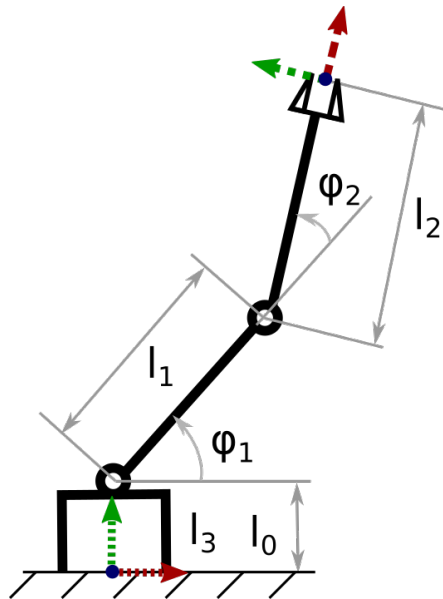
Denavit–Hartenberg notace

- ▶ Metoda pro přiřazení souřadnicových soustav tělesům v kinematických řetězcích
- ▶ Představena Jacquesem Denavitem a Richardem Hartenbergem v roce 1955
- ▶ Minimální reprezentace
- ▶ Někdy používána v robotice



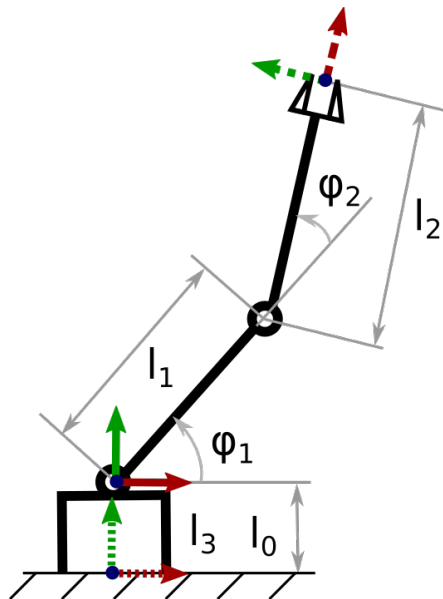
Motivace

- Uvažujme FK pro planární 2-DoF manipulátor
 $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow T \in SE(2)$



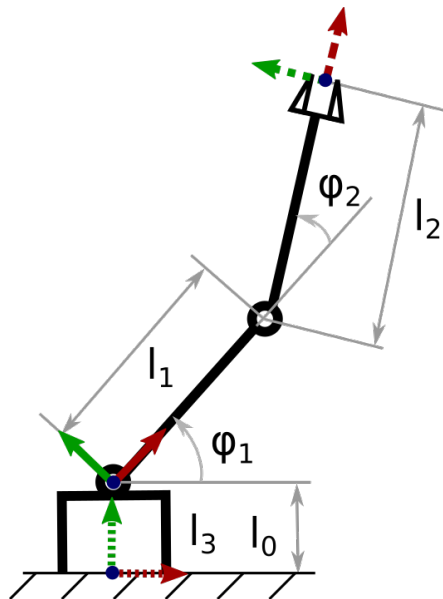
Motivace

- ▶ Uvažujme FK pro planární 2-DoF manipulátor
 $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow T \in SE(2)$
- ▶ $T_1 = T_y(l_0)$



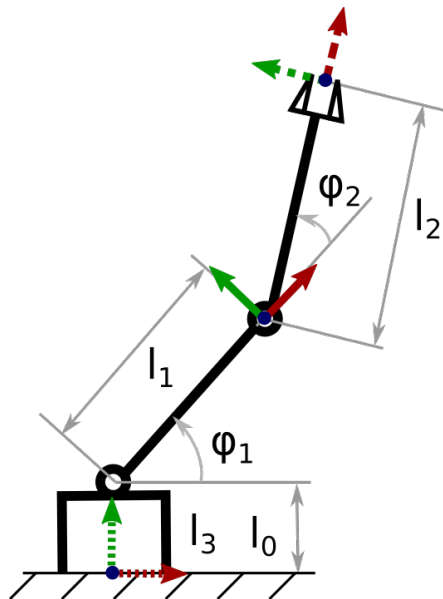
Motivace

- ▶ Uvažujme FK pro planární 2-DoF manipulátor
 $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow T \in SE(2)$
- ▶ $T_1 = T_y(l_0)$
- ▶ $T_2 = R(\varphi_1)$



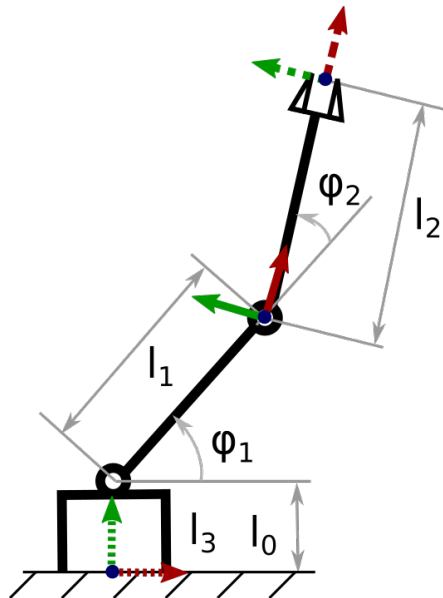
Motivace

- ▶ Uvažujme FK pro planární 2-DoF manipulátor
 $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow T \in SE(2)$
- ▶ $T_1 = T_y(l_0)$
- ▶ $T_2 = R(\varphi_1)T_x(l__1)$



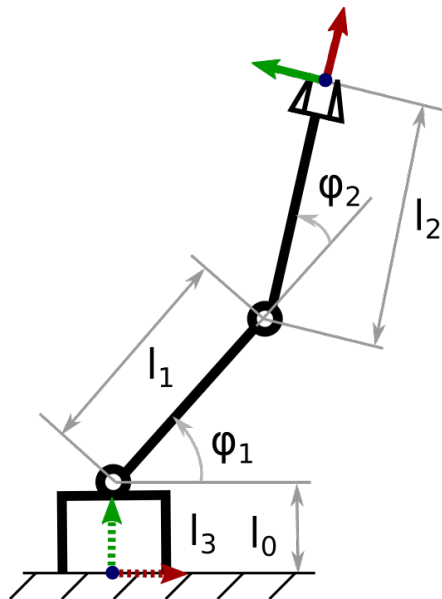
Motivace

- ▶ Uvažujme FK pro planární 2-DoF manipulátor
 $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow T \in SE(2)$
- ▶ $T_1 = T_y(l_0)$
- ▶ $T_2 = R(\varphi_1)T_x(l_1)$
- ▶ $T_3 = R(\varphi_2)$



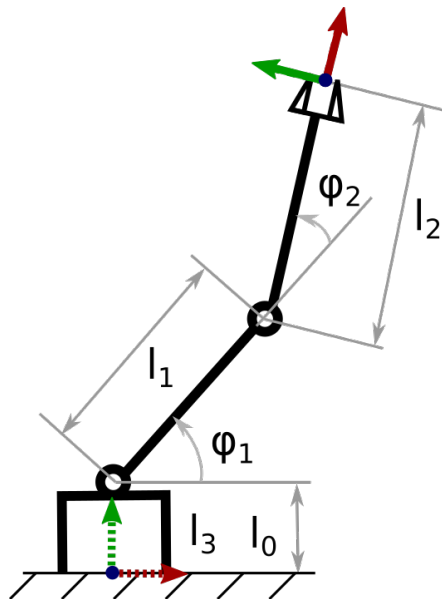
Motivace

- ▶ Uvažujme FK pro planární 2-DoF manipulátor
 $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow T \in SE(2)$
- ▶ $T_1 = T_y(l_0)$
- ▶ $T_2 = R(\varphi_1)T_x(l_1)$
- ▶ $T_3 = R(\varphi_2)T_x(l_2)$



Motivace

- ▶ Uvažujme FK pro planární 2-DoF manipulátor
 $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow T \in SE(2)$
- ▶ $T_1 = T_y(l_0)$
- ▶ $T_2 = R(\varphi_1)T_x(l_1)$
- ▶ $T_3 = R(\varphi_2)T_x(l_2)$
- ▶ $T = T_1T_2T_3$



Motivace

- ▶ Uvažujme FK pro planární 2-DoF manipulátor
 $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow T \in SE(2)$
- ▶ $T_1 = T_y(l_0)$
- ▶ $T_2 = R(\varphi_1)T_x(l_1) \leftarrow$ struktura
- ▶ $T_3 = R(\varphi_2)T_x(l_2)$
- ▶ $T = T_1T_2T_3$



Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory



Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a), T_z(d), R_x(\alpha), R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$



Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a), T_z(d), R_x(\alpha), R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
- ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?
 1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
 2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$



Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a)$, $T_z(d)$, $R_x(\alpha)$, $R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
- ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?

1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
ano, $T_xR_x = R_xT_x$
2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$

$$T_yR_y$$

$$R_yT_y$$



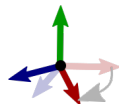
Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a)$, $T_z(d)$, $R_x(\alpha)$, $R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
- ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?

1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
ano, $T_xR_x = R_xT_x$
2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$

$$T_yR_y$$

$$R_yT_y$$



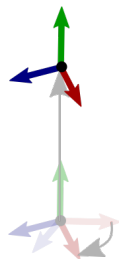
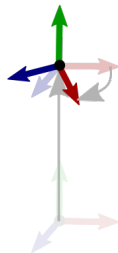
Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a)$, $T_z(d)$, $R_x(\alpha)$, $R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
- ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?

1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
ano, $T_xR_x = R_xT_x$
2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$

$$T_yR_y$$

$$R_yT_y$$



Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a), T_z(d), R_x(\alpha), R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
- ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?
 1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
ano, $T_xR_x = R_xT_x$
 2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$

$$T_x R_y$$

$$R_y T_x$$

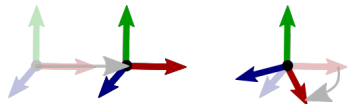


Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
 - ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a), T_z(d), R_x(\alpha), R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
 - ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?
1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
ano, $T_xR_x = R_xT_x$
 2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$

$$T_x R_y$$

$$R_y T_x$$



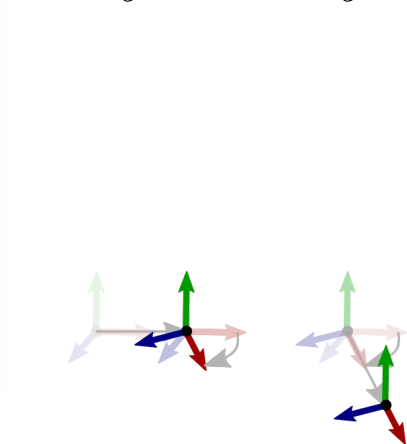
Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a)$, $T_z(d)$, $R_x(\alpha)$, $R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
- ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?

1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
ano, $T_xR_x = R_xT_x$
2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$

$$T_xR_y$$

$$R_yT_x$$



Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a), T_z(d), R_x(\alpha), R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
- ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?
 1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
ano, $T_xR_x = R_xT_x$
 2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$
- ▶ Můžeme vytvořit libovolnou $SE(3)$ transformaci pomocí DH?



Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a), T_z(d), R_x(\alpha), R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
- ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?
 1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
ano, $T_xR_x = R_xT_x$
 2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$
- ▶ Můžeme vytvořit libovolnou $SE(3)$ transformaci pomocí DH?
 - ▶ Ne, pouze 4 stupně volnosti



Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a), T_z(d), R_x(\alpha), R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
- ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?
 1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
ano, $T_xR_x = R_xT_x$
 2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$
- ▶ Můžeme vytvořit libovolnou $SE(3)$ transformaci pomocí DH?
 - ▶ Ne, pouze 4 stupně volnosti
 - ▶ Navrženo pro otevřené kinematické řetězce s rotačními a posuvnými klouby



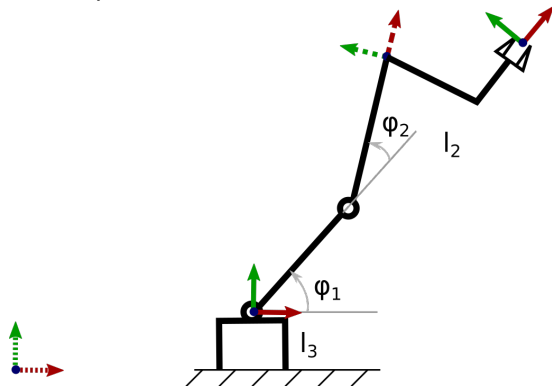
Denavit–Hartenberg parametry

- ▶ Podobná struktura, ale pro prostorové manipulátory
- ▶ Čtyři parametry pro každou transformaci
 - ▶ $T_x(a), T_z(d), R_x(\alpha), R_z(\theta)$
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
- ▶ Který z následujících je roven T_{DH} ?
 1. $T_{DH} = T_z(d)R_z(\theta)T_x(a)R_x(\alpha)$
ano, $T_xR_x = R_xT_x$
 2. $T_{DH} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d)$
- ▶ Můžeme vytvořit libovolnou $SE(3)$ transformaci pomocí DH?
 - ▶ Ne, pouze 4 stupně volnosti
 - ▶ Navrženo pro otevřené kinematické řetězce s rotačními a posuvnými klouby
- ▶ Souřadnicové systémy musí být vhodně umístěny
 - ▶ osa z je v ose rotace/posunu
 - ▶ x_1 je kolmá na z_0 a z_1
 - ▶ x_1 protíná z_0 a z_1



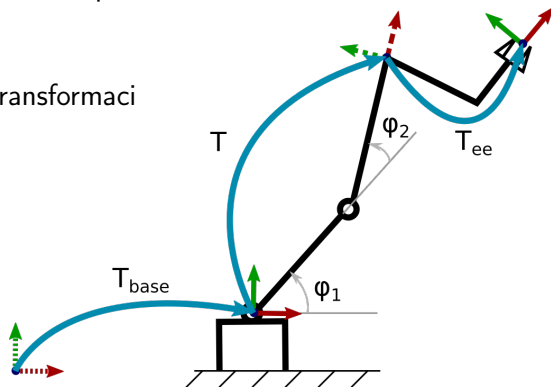
Počáteční a koncová transformace

- ▶ Nemůžeme vytvořit libovolnou $SE(3)$ transformaci pomocí DH
 - ▶ Namontovat gripper na jiné místo
 - ▶ Definovat jinou referenční soustavu



Počáteční a koncová transformace

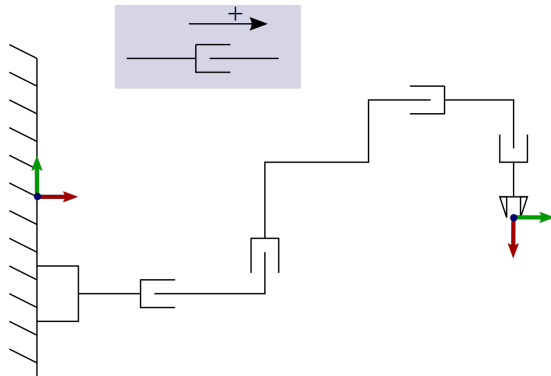
- ▶ Nemůžeme vytvořit libovolnou $SE(3)$ transformaci pomocí DH
 - ▶ Namontovat gripper na jiné místo
 - ▶ Definovat jinou referenční soustavu
- ▶ Obvykle definujeme počáteční a koncovou transformaci
 - ▶ $T = T_{DH}^1 T_{DH}^2 \dots T_{DH}^n$
 - ▶ $T_{FK} = T_{base} T T_{ee}$



Příklad: prostorový robot v rovině

$$xyz = rgb$$

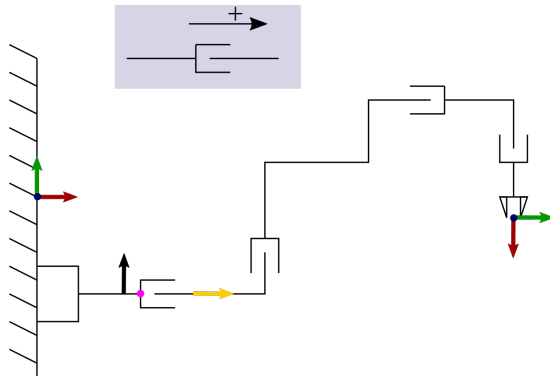
- ▶ Čtyři posuvné klouby
- ▶ Vyřešte FK pomocí DH notace



Příklad: prostorový robot v rovině

$$xyz = rgb$$

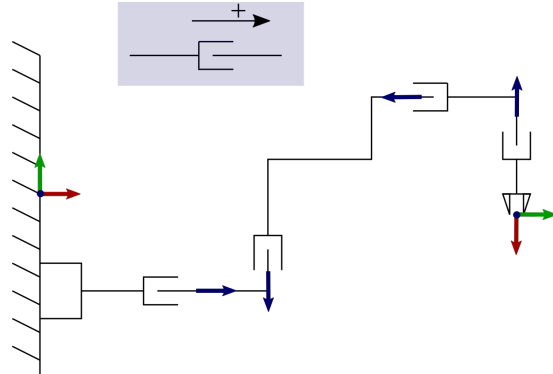
- ▶ Osa z je v ose rotace/posunu
- ▶ Kde bude osa z ?
 1. černá
 2. žlutá
 3. růžová



Příklad: prostorový robot v rovině

$$xyz = rgb$$

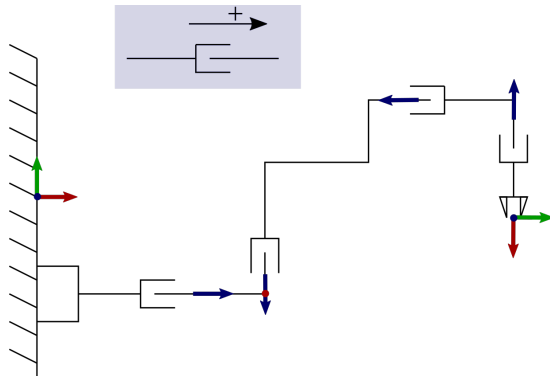
- Pozor na orientaci



Příklad: prostorový robot v rovině

$$xyz = rgb$$

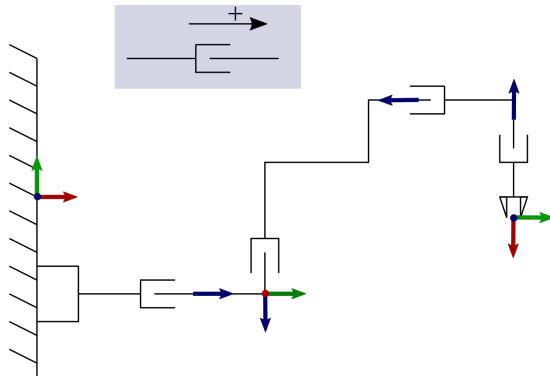
- ▶ Známe:
 - ▶ x_1 je kolmá na z_0 a z_1
 - ▶ x_1 protíná z_0 a z_1
- ▶ Osa x první souřadnicové soustavy:
 1. osa směřuje z obrazovky
 2. osa směřuje do obrazovky
 3. obě možnosti jsou správné



Příklad: prostorový robot v rovině

$$xyz = rgb$$

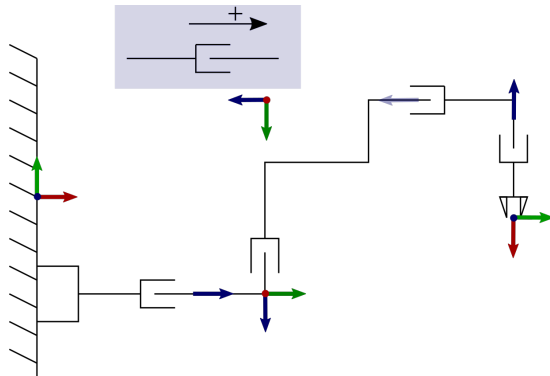
- Známe x a z ,
můžeme určit počátek a y



Příklad: prostorový robot v rovině

$$xyz = rgb$$

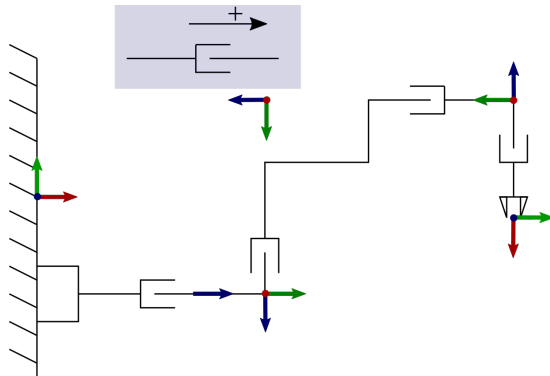
- Některé souřadnicové soustavy mohou být 'mimo' robota



Příklad: prostorový robot v rovině

$$xyz = rgb$$

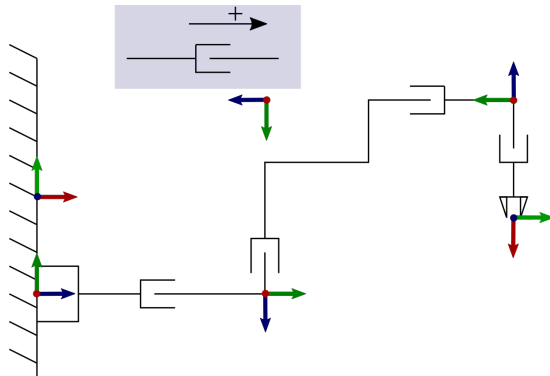
- Chybí pouze poslední souřadnicová soustava



Příklad: prostorový robot v rovině

$$xyz = rgb$$

- ▶ Máme 6 souřadnicových soustav
 - ▶ Počáteční transformace
 - ▶ 4 DH transformace
 - ▶ Koncová transformace
- ▶ Zbývá určit DH parametry



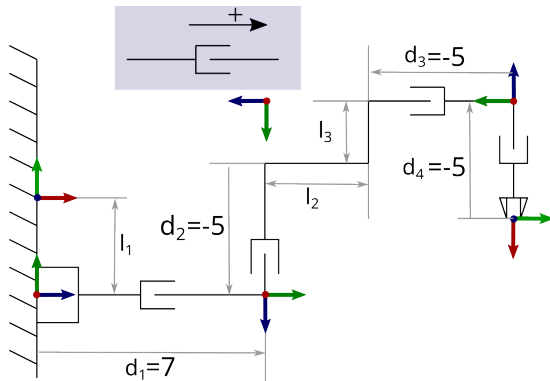
Příklad: prostorový robot v rovině

$$xyz = rgb$$

- Počáteční transformace: $T_y(-l_1)R_y(90^\circ)$

Typ kloubu	θ	d	a	α
P	0	d_1	0	90°
P	0	$d_2 - l_3$	0	90°
P	0	$d_3 - l_2$	0	90°
P	0	d_4	0	0

- Musíme zahrnout pomocnou souřadnicovou soustavu před gripperem
 - x_1 není kolmá na z_0 a z_1
- Koncová transformace: $R_y(90^\circ)R_x(180^\circ)$



- ▶ Co je DH notace
 - ▶ $T_{DH} = R_z(\theta)T_z(d)R_x(\alpha)T_x(a)$
 - ▶ Navrženo pro otevřené kinematické řetězce s rotačními a posuvnými klouby
- ▶ Jak přiřadit souřadnicové soustavy