Robotika: sbírka příkladů – rotace – ŘEŠENÍ

Příklady procvičují reprezentace rotací v prostoru: rotační matice a jejich skládání, reprezentaci osa–úhel (Rodriguesův vzorec a zpětný převod) a kvaterniony. Výpočty zapisujte maticově; stačí matice sestavit a naznačit, co se čím násobí.

Notace.

- $R \in \mathrm{SO}(3)$ je rotační matice 3×3, $R^\top R = I$, $\det R = 1$; R_{RA} převádí souřadnice ze systému A do systému R a její sloupce jsou osy systému A vyjádřené v R.
- Rotace kolem souřadnicových os o úhel θ:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Osa–úhel: jednotková osa $\hat{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{R}^3$, $\|\hat{\boldsymbol{\omega}}\| = 1$, a úhel θ; $[\boldsymbol{\omega}]$ je antisymetrická matice vektoru $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^\top$, exponenciální souřadnice jsou $\boldsymbol{\omega} = \theta\,\hat{\boldsymbol{\omega}}$:

$$[\boldsymbol{\omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{\omega}]\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}.$$

- Kvaternion $\boldsymbol{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)^\top = (q_w, \boldsymbol{q}_{xyz})$, $\|\boldsymbol{q}\| = 1$; pořadí složek je w, x, y, z.
- Vektory píšeme tučně ($\boldsymbol{v}$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{q}$), skaláry netučně (θ, q_w), matice velkými písmeny (R); body a souřadnicové systémy velkými netučnými písmeny (R, A).

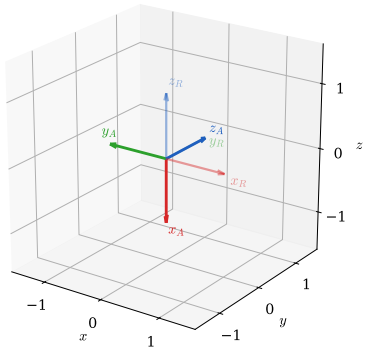
1. Elementární rotace a jejich skládání

Systém A má s R společný počátek a vznikne z R rotací $R_{RA} = R_z(90°)\,R_y(90°)$.

a) Zapište $R_y(90°)$, $R_z(90°)$ a spočítejte R_{RA}.

b) Bod V má v systému A polohu $\boldsymbol{t}_{AV} = (1, 2, 3)^\top$. Spočítejte $\boldsymbol{t}_{RV}$.

c) Spočítejte $R_y(90°)\,R_z(90°)$ a porovnejte s R_{RA}.



Řešení.

a)

$\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$:

$$R_y(90°) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_z(90°) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{RA} = R_z(90°)\,R_y(90°) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sloupce jsou osy systému A v R: $\boldsymbol{x}_A = -\boldsymbol{z}_R$, $\boldsymbol{y}_A = -\boldsymbol{x}_R$, $\boldsymbol{z}_A = \boldsymbol{y}_R$ (viz obrázek).

---

b)

Systémy mají společný počátek, $\boldsymbol{t}_{RA} = \boldsymbol{0}$, takže změna souřadnic je jen rotace:

$$\boldsymbol{t}_{RV} = R_{RA}\,\boldsymbol{t}_{AV} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c)

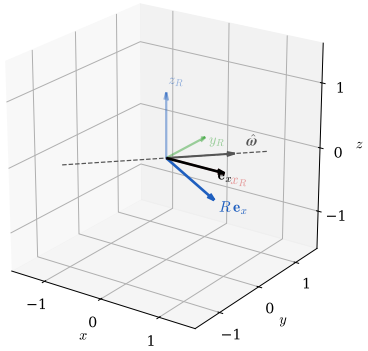
$$R_y(90°)\,R_z(90°) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq R_{RA}.$$

Skládání rotací není komutativní; v obráceném pořadí vyjde cyklická záměna os $\boldsymbol{x}_A = \boldsymbol{y}_R$, $\boldsymbol{y}_A = \boldsymbol{z}_R$, $\boldsymbol{z}_A = \boldsymbol{x}_R$.

2. Osa–úhel: Rodriguesův vzorec a kvaternion

Rotace je dána osou $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^\top$ a úhlem $\theta = 90°$.

a) Zapište $[\hat{\boldsymbol{\omega}}]$ a $[\hat{\boldsymbol{\omega}}]^2$.
b) Rodriguesovým vzorcem spočítejte rotační matici R.
c) Zapište odpovídající kvaternion $\boldsymbol{q}$ a exponenciální souřadnice $\boldsymbol{\omega}$.
d) Kam se otočí vektor $\boldsymbol{e}_x = (1,0,0)^\top$? Ověřte, že osa rotace zůstává na místě, $R\,\hat{\boldsymbol{\omega}} = \hat{\boldsymbol{\omega}}$.



Řešení.

a)

$$[\hat{\boldsymbol{\omega}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\hat{\boldsymbol{\omega}}]^2 = \hat{\boldsymbol{\omega}}\,\hat{\boldsymbol{\omega}}^\top - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b)

Rodriguesův vzorec $R = I + \sin\theta\,[\hat{\boldsymbol{\omega}}] + (1-\cos\theta)\,[\hat{\boldsymbol{\omega}}]^2$ se $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$:

$$R = I + [\hat{\boldsymbol{\omega}}] + [\hat{\boldsymbol{\omega}}]^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & h \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -h \\ -h & h & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c)

$$q_w = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \boldsymbol{q}_{xyz} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^\top \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^\top, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{q} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^\top;$$

$$\boldsymbol{\omega} = \theta\,\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^\top = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1,1,0)^\top \approx (1{,}11, 1{,}11, 0)^\top.$$

d)

Obraz $\boldsymbol{e}_x$ je první sloupec R:

$$R\,\boldsymbol{e}_x = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^\top.$$

Osa: $R\,\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, -h+h\right)^\top = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^\top = \hat{\boldsymbol{\omega}}$; obecně $[\hat{\boldsymbol{\omega}}]\hat{\boldsymbol{\omega}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, takže z Rodriguesova vzorce zbude jen $I\hat{\boldsymbol{\omega}}$.

3. Z rotační matice na osu–úhel a kvaternion

Jsou dány rotační matice

$$R_{RA} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(z příkladu 1)} \quad \text{a} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete úhel θ a osu $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ rotace R_{RA}.
b) Spočítejte kvaternion $\boldsymbol{q}$ přímo z R_{RA} a porovnejte ho s kvaternionem získaným z osy a úhlu. Kolik kvaternionů popisuje tutéž rotaci?
c) Proč pro R_2 obecný postup z a) selže a jak se osa určí?

Řešení.

a)
$\operatorname{tr} R_{RA} = 0$, tedy

$$\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr} R - 1}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$[\hat{\boldsymbol{\omega}}] = \frac{R - R^\top}{2\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

a z definice $[\boldsymbol{\omega}]$ odečteme $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ z prvků $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$: $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^\top$. Matice R_{RA}, která permutuje osy, je tedy otočení o 120° kolem tělesové úhlopříčky $(-1,1,1)$.

---

b)
Přímo z matice:

$$q_w = \frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{tr} R} = \frac{1}{2}, \quad \boldsymbol{q}_{xyz} = \frac{1}{4q_w}(r_{32}-r_{23}, r_{13}-r_{31}, r_{21}-r_{12})^\top = \frac{1}{2}(-1,1,1)^\top, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{q} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top.$$

Z osy a úhlu: $q_w = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{q}_{xyz} = \sin 60° \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^\top = \frac{1}{2}(-1,1,1)^\top$. Souhlasí. Tutéž rotaci popisují dva kvaterniony, $\boldsymbol{q}$ a $-\boldsymbol{q}$ (otočení o θ kolem $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ je totéž co otočení o $360° - \theta$ kolem $-\hat{\boldsymbol{\omega}}$).

---

c)
$\operatorname{tr} R_2 = -1$, tedy $\theta = \arccos(-1) = 180°$ a $\sin\theta = 0$: matice $R_2 - R_2^\top = 0$ a osu z ní určit nelze (dělení nulou). Pro $\theta = 180°$ se použije vzorec z přednášky, zde s $r_{11} \neq -1$:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{11})}}(1+r_{11}, r_{21}, r_{31})^\top = \frac{1}{2}(2,0,0)^\top = (1,0,0)^\top,$$

tj. otočení o 180° kolem osy x. Kontrola Rodriguesovým vzorcem: $R = I + 0\cdot[\hat{\boldsymbol{\omega}}] + 2[\hat{\boldsymbol{\omega}}]^2 = I + 2\operatorname{diag}(0,-1,-1) = \operatorname{diag}(1,-1,-1)$.

4. Skládání dvou rotací a pořadí

Rotace $R_a = R_z(90°)$ a $R_b = R_x(90°)$.
a) Spočítejte $R = R_a R_b$ a $R' = R_b R_a$.
b) Pro obě matice určete osu a úhel.
c) Pro obě matice zapište kvaternion.

Řešení.

a)

$$R = R_z(90°)\,R_x(90°) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R' = R_x(90°)\,R_z(90°) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledky se liší, skládání rotací není komutativní. $R\,\boldsymbol{v}$ otočí vektor nejprve kolem x a pak kolem z (čteme zprava), R' naopak.

---

b)

Obě matice mají $\operatorname{tr} = 0$, tedy stejný úhel $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$, $2\sin\theta = \sqrt{3}$. Osy z $(R - R^\top)/(2\sin\theta)$, tj. $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(r_{32} - r_{23}, r_{13} - r_{31}, r_{21} - r_{12})^\top$:

$$R: \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-0, 1-0, 1-0)^\top = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^\top, \qquad R': \quad \hat{\boldsymbol{\omega}}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(0-(-1), 0-1, 0-(-1))^\top = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^\top.$$

Stejný úhel, ale jiná osa: R je otočení o 120° kolem úhlopříčky $(1,1,1)$ (cyklická záměna os $x \to y \to z \to x$), R' kolem úhlopříčky $(1,-1,1)$.

---

c)

$q_w = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \operatorname{tr} R} = \frac{1}{2}$ pro obě, $\boldsymbol{q}_{xyz} = \frac{1}{4q_w}(r_{32} - r_{23}, r_{13} - r_{31}, r_{21} - r_{12})^\top = \frac{1}{2}(r_{32} - r_{23}, r_{13} - r_{31}, r_{21} - r_{12})^\top$:

$$\boldsymbol{q} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top, \quad \boldsymbol{q}' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top.$$

(Totéž z osy a úhlu: $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}(1,1,1)^\top$.)