Robotika: sbírka příkladů – rotace

Příklady procvičují reprezentace rotací v prostoru: rotační matice a jejich skládání, reprezentaci osa–úhel (Rodriguesův vzorec a zpětný převod) a kvaterniony. Výpočty zapisujte maticově; stačí matice sestavit a naznačit, co se čím násobí.

Notace.

- $R \in \mathrm{SO}(3)$ je rotační matice 3×3, $R^\top R = I$, $\det R = 1$; R_{RA} převádí souřadnice ze systému A do systému R a její sloupce jsou osy systému A vyjádřené v R.
- Rotace kolem souřadnicových os o úhel θ:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Osa–úhel: jednotková osa $\hat{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{R}^3$, $\|\hat{\boldsymbol{\omega}}\| = 1$, a úhel θ; $[\boldsymbol{\omega}]$ je antisymetrická matice vektoru $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^\top$, exponenciální souřadnice jsou $\boldsymbol{\omega} = \theta\,\hat{\boldsymbol{\omega}}$:

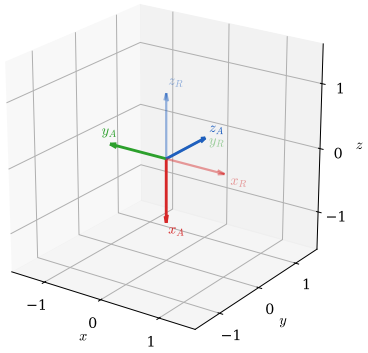
$$[\boldsymbol{\omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{\omega}]\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}.$$

- Kvaternion $\boldsymbol{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)^\top = (q_w, \boldsymbol{q}_{xyz})$, $\|\boldsymbol{q}\| = 1$; pořadí složek je w, x, y, z.
- Vektory píšeme tučně ($\boldsymbol{v}$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{q}$), skaláry netučně (θ, q_w), matice velkými písmeny (R); body a souřadnicové systémy velkými netučnými písmeny (R, A).

1. Elementární rotace a jejich skládání

Systém A má s R společný počátek a vznikne z R rotací $R_{RA} = R_z(90°)\,R_y(90°)$.

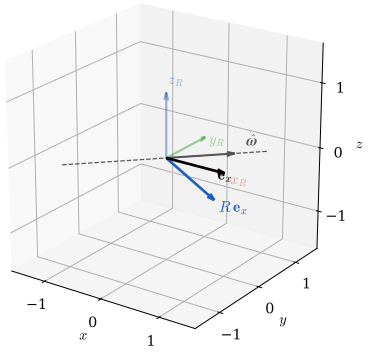
a) Zapište $R_y(90°)$, $R_z(90°)$ a spočítejte R_{RA}.
b) Bod V má v systému A polohu $\boldsymbol{t}_{AV} = (1, 2, 3)^\top$. Spočítejte $\boldsymbol{t}_{RV}$.
c) Spočítejte $R_y(90°)\,R_z(90°)$ a porovnejte s R_{RA}.



2. Osa–úhel: Rodriguesův vzorec a kvaternion

Rotace je dána osou $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^\top$ a úhlem $\theta = 90°$.

a) Zapište $[\hat{\boldsymbol{\omega}}]$ a $[\hat{\boldsymbol{\omega}}]^2$.
b) Rodriguesovým vzorcem spočítejte rotační matici R.
c) Zapište odpovídající kvaternion $\boldsymbol{q}$ a exponenciální souřadnice $\boldsymbol{\omega}$.
d) Kam se otočí vektor $\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)^\top$? Ověřte, že osa rotace zůstává na místě, $R\,\hat{\boldsymbol{\omega}} = \hat{\boldsymbol{\omega}}$.



3. Z rotační matice na osu–úhel a kvaternion

Jsou dány rotační matice

$$R_{RA} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(z příkladu 1)} \quad \text{a} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete úhel θ a osu $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ rotace R_{RA}.
b) Spočítejte kvaternion $\boldsymbol{q}$ přímo z R_{RA} a porovnejte ho s kvaternionem získaným z osy a úhlu. Kolik kvaternionů popisuje tutéž rotaci?
c) Proč pro R_2 obecný postup z a) selže a jak se osa určí?

4. Skládání dvou rotací a pořadí

Rotace $R_a = R_z(90°)$ a $R_b = R_x(90°)$.

a) Spočítejte $R = R_a R_b$ a $R' = R_b R_a$.
b) Pro obě matice určete osu a úhel.
c) Pro obě matice zapište kvaternion.