Robotika: sbírka příkladů – transformace – ŘEŠENÍ

Příklady procvičují zápis a skládání transformací: zápis T_{XY} z obrázku, inverzi, skládání a převod souřadnic bodu mezi systémy. Na obrázcích je červeně osa x, zeleně osa y (modře z). Výpočty zapisujte v homogenních souřadnicích jako součiny matic: stačí matice sestavit a naznačit, co se čím násobí; výsledek nemusíte dopočítávat ručně.

Notace.

- Souřadnicové systémy: R je referenční systém; A, B, C, … jsou další systémy, G systém chapadla.
- $T_{XY} \in \mathrm{SE}(2)$ je homogenní matice 3×3, která převádí souřadnice ze systému Y do systému X:

$$T_{XY} = \begin{pmatrix} R(\varphi_{XY}) & \boldsymbol{t}_{XY} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

- φ_{XY} je úhel natočení systému Y vůči X.
- $\boldsymbol{t}_{XY} = (x_{XY}, y_{XY})^\top \in \mathbb{R}^2$ je **vektor z počátku X do počátku Y vyjádřený v X** (nehomogenní).
- Poloha bodu V v systému X je $\boldsymbol{t}_{XV} \in \mathbb{R}^2$, vektor z počátku X do bodu V vyjádřený v X; $\boldsymbol{t}_{XY}$ je tedy poloha počátku systému Y.
- Homogenní souřadnice značíme horním indexem H: $\boldsymbol{t}^H_{XV} = (x_{XV}, y_{XV}, 1)^\top$, takže $\boldsymbol{t}^H_{XV} = T_{XY}\, \boldsymbol{t}^H_{YV}$; nehomogenně $\boldsymbol{t}_{XV} = R(\varphi_{XY})\, \boldsymbol{t}_{YV} + \boldsymbol{t}_{XY}$.
- $R(\theta)$ je rotace o úhel θ; v součinu transformací ji chápeme jako prvek $\mathrm{SE}(2)$:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} R(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

- Posuny podél os, I je jednotková matice 2×2:

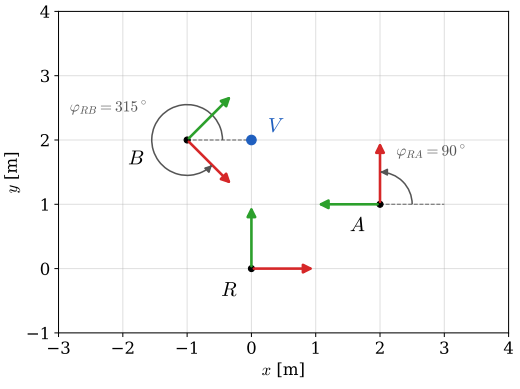
$$T_x(l) = \begin{pmatrix} I & (l,0)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}, \quad T_y(l) = \begin{pmatrix} I & (0,l)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

- V prostoru je $T_{XY} = \begin{pmatrix} R_{XY} & \boldsymbol{t}_{XY} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SE}(3)$ matice 4×4 s rotační maticí $R_{XY} \in \mathrm{SO}(3)$ a $\boldsymbol{t}_{XY} \in \mathbb{R}^3$; $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$ jsou rotace kolem souřadnicových os.
- Vektory píšeme tučně ($\boldsymbol{t}$), skaláry netučně (x_{XY}, θ), matice velkými písmeny (T, R); velkými netučnými písmeny značíme i body a souřadnicové systémy (V, P, A, B, R).

1. Dva systémy a bod – základní úloha

Na obrázku jsou souřadnicové systémy A a B. Bod V je zadán v systému A: $\boldsymbol{t}_{AV} = (1, 2)^\top$.

a) Zapište T_{RA} a T_{RB} (rotační matici i translaci číselně).
b) Spočítejte T_{AB} a T_{BA}. Naznačte, jak se počítá inverze, a ověřte, že $T_{AB} T_{BA} = I$.
c) Spočítejte $\boldsymbol{t}_{RV}$ a $\boldsymbol{t}_{BV}$ a zkontrolujte výsledek odečtením z obrázku.
d) Spočítejte $\boldsymbol{t}_{BV}$ také jedním krokem pomocí T_{BA} z b).



Řešení.

a)
Z obrázku odečteme úhel natočení osy x_A od x_R (v kladném směru) a polohu počátku A, totéž pro B, a sestavíme homogenní matice:

$$T_{RA} = \begin{pmatrix} R(\varphi_{RA}) & \boldsymbol{t}_{RA} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(90°) & (2,1)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{RB} = \begin{pmatrix} R(\varphi_{RB}) & \boldsymbol{t}_{RB} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(315°) & (-1,2)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & h & -1 \\ -h & h & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

---

b)
T_{AB} převádí souřadnice z B do A. Složíme ji z transformací, které známe: nejprve z B do R, potom z R do A, tj.

$$T_{AB} = T_{AR}\, T_{RB} = T_{RA}^{-1}\, T_{RB}.$$

Inverze homogenní matice (rotace se transponuje, translace se otočí zpět a změní znaménko), pro T_{RA} tedy

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R^\top & -R^\top \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{RA}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zbývá vynásobit dvě matice 3×3:

$$T_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & h & -1 \\ -h & h & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h & h & 1 \\ -h & -h & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tj. $R(\varphi_{AB}) = R(-135°)$ a $\boldsymbol{t}_{AB} = (1,3)^\top$ (počátek B je v souřadnicích A posunut o $(1,3)^\top$, osa x_B je vůči x_A otočená o 135° po směru hodinových ručiček). T_{BA} je inverze T_{AB} podle téhož vzorce:

$$T_{BA} = T_{AB}^{-1} = \begin{pmatrix} -h & -h & 2\sqrt{2} \\ h & -h & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tj. $R(\varphi_{BA}) = R(135°)$, $\boldsymbol{t}_{BA} = \left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)^\top \approx (2{,}83, 1{,}41)^\top$. Kontrola: součin $T_{AB}T_{BA}$ dává jednotkovou matici (rotační bloky $R(-135°)R(135°) = I$, translační část $R(-135°)\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)^\top + (1,3)^\top = \mathbf{0}$).

---

c)
Bod V převedeme z A do R a potom z R do B; v homogenních souřadnicích je každý krok násobení maticí:

$$\boldsymbol{t}_{RV}^H = T_{RA}\, \boldsymbol{t}_{AV}^H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{t}_{BV}^H = T_{RB}^{-1}\, \boldsymbol{t}_{RV}^H = \begin{pmatrix} h & -h & 3h \\ h & h & -h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{t}_{BV} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^\top \approx (0{,}71, 0{,}71)^\top.$$

Kontrola z obrázku: V leží na ose y_R ve výšce 2. Od počátku B je posunut o $(1,0)^\top$ ve směru x_R; osa x_B je vůči x_R otočená o $-45°$, směr x_R má tedy v systému B úhel $+45°$ a V leží ve vzdálenosti 1 na úhlopříčce mezi x_B a y_B.

---

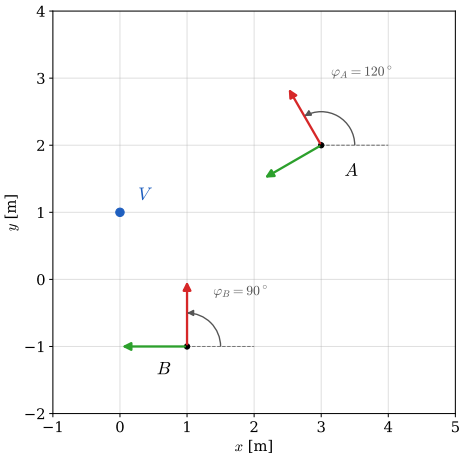
d)
Oba kroky z c) lze spojit do jedné matice, protože $T_{RB}^{-1}T_{RA} = T_{BA}$ z b):

$$\boldsymbol{t}_{BV}^H = T_{BA}\, \boldsymbol{t}_{AV}^H = \begin{pmatrix} -h & -h & 2\sqrt{2} \\ h & -h & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Dva systémy bez zakresleného referenčního systému

Na obrázku jsou souřadnicové systémy A a B. Referenční systém R zakreslen není, ale čísla na osách odpovídají jeho souřadnicím; kdo chce, může si ho zavést a postupovat jako v příkladu 1. Úhly φ_A a φ_B jsou měřeny od vodorovného směru, tj. od osy x_R. Bod V je zadán v systému B: $\boldsymbol{t}_{BV} = (2,1)^\top$.

a) Odečtěte z obrázku T_{BA}.
b) Spočítejte T_{AB}. Proč je obtížnější ji vyčíst z obrázku?
c) Spočítejte $\boldsymbol{t}_{AV}$.



Řešení.

a)
Osa x_B míří nahoru a y_B doleva. Počátek A je od počátku B o 3 dílky ve směru x_B a o 2 dílky proti směru y_B, tedy $\boldsymbol{t}_{BA} = (3,-2)^\top$; osa x_A svírá s x_B úhel $\varphi_{BA} = \varphi_A - \varphi_B = 120° - 90° = 30°$:

$$T_{BA} = \begin{pmatrix} R(\varphi_{BA}) & \boldsymbol{t}_{BA} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(30°) & (3,-2)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Totéž vyjde přes zavedený systém R jako $T_{BA} = T_{RB}^{-1} T_{RA}$ s $T_{RA} = (R(120°), (3,2)^\top)$ a $T_{RB} = (R(90°), (1,-1)^\top)$.)

---

b)
T_{AB} je inverze T_{BA} podle vzorce $T^{-1} = (R^\top, -R^\top \boldsymbol{t})$:

$$T_{AB} = T_{BA}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 1 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}87 & 0{,}5 & -1{,}60 \\ -0{,}5 & 0{,}87 & 3{,}23 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z obrázku bychom museli polohu počátku B odečíst na osách x_A, y_A, které nejsou rovnoběžné s mřížkou (jsou otočené o 120°): souřadnice nevyjdou celočíselné a odhad je nepřesný. Osy B jsou s mřížkou rovnoběžné, proto se T_{BA} odečte přesně a T_{AB} je jednodušší dopočítat inverzí.

---

c)
Bod převedeme z B do A maticí T_{AB}:

$$\boldsymbol{t}_{AV}^H = T_{AB}\, \boldsymbol{t}_{BV}^H = T_{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{t}_{AV} \approx (0{,}63, 3{,}10)^\top.$$

Kontrola z obrázku: od počátku B je V o 2 dílky ve směru x_B (nahoru) a o 1 dílek ve směru y_B (doleva), leží tedy v bodě mřížky $(0,1)$; jeho vzdálenost od počátku A je $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$, stejně jako $\|\boldsymbol{t}_{AV}\|$.

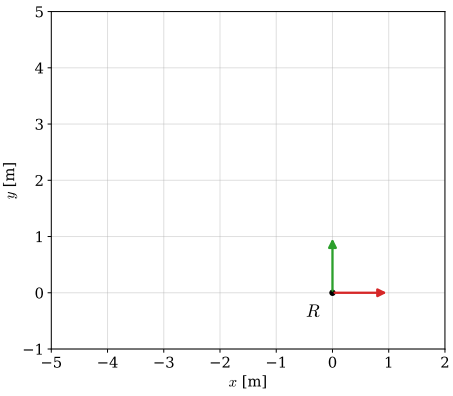
3. Nakreslete systémy ze zadaných transformací

Je dáno $T_{RA} = (R(90°), (-2,1)^\top)$ a $T_{AB} = (R(-45°), (2,1)^\top)$; v systému B leží bod V, $\boldsymbol{t}_{BV} = (1,1)^\top$.

a) Nakreslete do mřížky systémy A a B a bod V (postupujte od R přes A).

b) Odečtěte z nákresu T_{RB} a ověřte výsledek výpočtem $T_{RB} = T_{RA}T_{AB}$.

c) Odečtěte z nákresu $\boldsymbol{t}_{RV}$ a ověřte výpočtem.

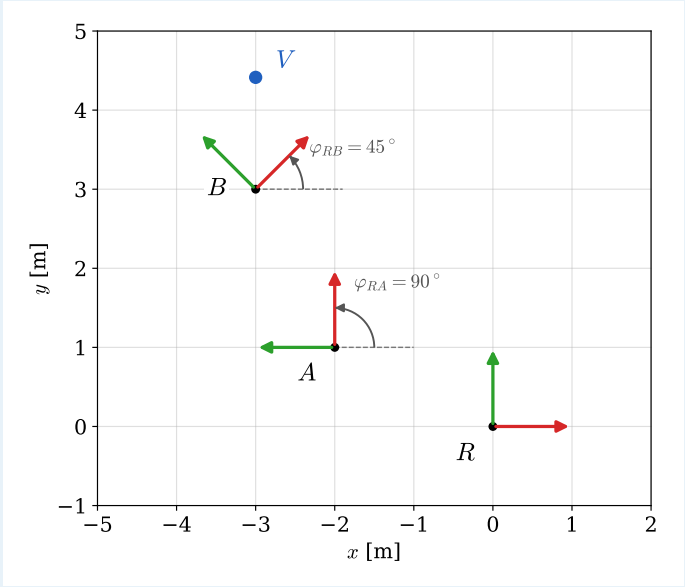


Řešení.

a)

Postupujeme po řetězci R → A → B → V:

- A: počátek v $(-2,1)^\top$, osa x_A je vůči x_R otočená o 90° (míří ve směru y_R), osa y_A míří ve směru $-x_R$.
- B: od počátku A jdeme o 2 podél x_A (nahoru) a o 1 podél y_A (doleva), tedy do $(-3,3)^\top$; osa x_B je vůči x_A otočená o $-45°$, vůči x_R tedy o $90° - 45° = 45°$.
- V: od počátku B o 1 podél x_B a o 1 podél y_B, tj. dohromady o $\sqrt{2}$ ve směru y_R, do $\left(-3, 3+\sqrt{2}\right)^\top$.



b)

Z nákresu $T_{RB} = \begin{pmatrix} R(45°) & (-3,3)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$. Výpočtem je to součin zadaných matic:

$$T_{RB} = T_{RA}\,T_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & h & 2 \\ -h & h & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -h & -3 \\ h & h & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tj. rotační blok $R(45°)$ a translace $(-3,3)^\top$, jak bylo odečteno.

c)

Bod převedeme z B do R maticí T_{RB}:

$$\boldsymbol{t}^H_{RV} = T_{RB}\,\boldsymbol{t}^H_{BV} = \begin{pmatrix} h & -h & -3 \\ h & h & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{t}_{RV} \approx (-3, 4{,}41)^\top,$$

což odpovídá nákresu.

4. Tři systémy – skládání transformací

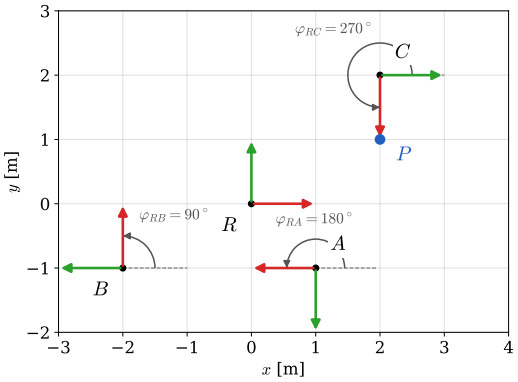
Na obrázku jsou systémy A, B, C a bod P zadaný v systému C: $\boldsymbol{t}_{CP} = (1, 0)^\top$.

a) Zapište T_{RA}, T_{RB}, T_{RC}.

b) Spočítejte T_{AB} a T_{BC} a z nich $T_{AC} = T_{AB}T_{BC}$. Ověřte výsledek přímo z $T_{RA}^{-1}T_{RC}$.

c) Spočítejte $\boldsymbol{t}_{RP}, \boldsymbol{t}_{AP}$ a $\boldsymbol{t}_{BP}$.

d) V jakém pořadí se transformace násobí, chceme-li $\boldsymbol{t}_{AP}$ z $\boldsymbol{t}_{CP}$? Napište výraz v homogenních souřadnicích a slovně popište, co každý činitel dělá.



Řešení.

a)

Z obrázku (úhly měříme od x_R v kladném směru, $R(270°) = R(-90°)$):

$$T_{RA} = \begin{pmatrix} R(\varphi_{RA}) & \boldsymbol{t}_{RA} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(180°) & (1,-1)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{RB} = \begin{pmatrix} R(\varphi_{RB}) & \boldsymbol{t}_{RB} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(90°) & (-2,-1)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{RC} = \begin{pmatrix} R(\varphi_{RC}) & \boldsymbol{t}_{RC} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(270°) & (2,2)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

b)

Potřebujeme inverze T_{RA}^{-1} a T_{RB}^{-1} (vzorec $T^{-1} = (R^\top, -R^\top \boldsymbol{t})$):

$$T_{RA}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{RB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledané transformace jsou součiny (z B do R a pak z R do A, resp. z C do R a pak z R do B):

$$T_{AB} = T_{RA}^{-1}\,T_{RB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{BC} = T_{RB}^{-1}\,T_{RC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tj. $T_{AB} = (R(-90°), (3,0)^\top)$ a $T_{BC} = (R(180°), (3,-4)^\top)$. Jejich složením

$$T_{AC} = T_{AB}\,T_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tj. $R(\varphi_{AC}) = R(90°)$, $\boldsymbol{t}_{AC} = (-1,-3)^\top$. Kontrola přímo z R:

$$T_{RA}^{-1}\,T_{RC} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

souhlasí.

---

c)
Bod P převedeme z C do R maticí T_{RC}, do A a B pak inverzemi:

$$\boldsymbol{t}_{RP}^{H} = T_{RC}\,\boldsymbol{t}_{CP}^{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{t}_{AP}^{H} = T_{RA}^{-1}\,\boldsymbol{t}_{RP}^{H} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{t}_{BP}^{H} = T_{RB}^{-1}\,\boldsymbol{t}_{RP}^{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kontrola přes T_{AC} z b):

$$\boldsymbol{t}_{AP}^{H} = T_{AC}\,\boldsymbol{t}_{CP}^{H} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

d)

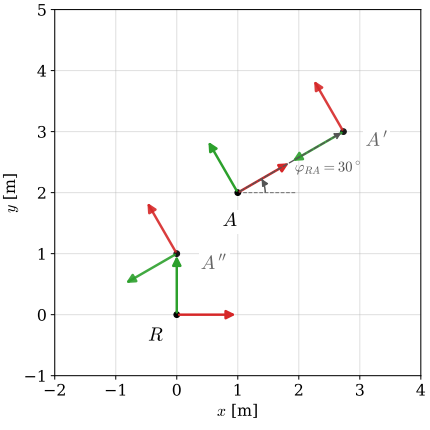
$$\boldsymbol{t}_{AP}^{H} = T_{AB}\,T_{BC}\,\boldsymbol{t}_{CP}^{H} = T_{RA}^{-1}\,T_{RC}\,\boldsymbol{t}_{CP}^{H}.$$

Čteme zprava doleva: T_{BC} převede souřadnice bodu z C do B, potom T_{AB} z B do A. Vnitřní indexy se „zkracují“ ($AB \cdot BC \to AC$); pořadí nelze zaměnit, $T_{BC}T_{AB}$ nemá význam, protože výstup T_{AB} (souřadnice v A) není vstupem T_{BC} (souřadnice v C).

5. Pohyb systému: v jeho vlastních, nebo v referenčních souřadnicích?

Systém A má $T_{RA} = (R(30°), (1, 2)^\top)$. Provedeme s ním pohyb $M = T_x(2)\,R(90°)$, tj. otočení o 90° a posun o 2 ve směru x.

a) Spočítejte $T_{RA'} = T_{RA}M$ (pohyb zadaný v souřadnicích systému A) a $T_{RA''} = MT_{RA}$ (pohyb zadaný v souřadnicích R).
b) Nakreslete oba výsledné systémy a slovně popište, který posun a která rotace se kde provedla.
c) Proč mají oba systémy stejnou orientaci? Platilo by to i v $\mathrm{SE}(3)$?



Řešení.

a)
Zadané matice:

$$T_{RA} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = T_x(2)\,R(90°) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Násobení zprava provádí pohyb v souřadnicích systému A, násobení zleva v souřadnicích R:

$$T_{RA'} = T_{RA}\,M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1+\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{RA''} = M\,T_{RA} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oba rotační bloky jsou $R(120°)$; počátky jsou $\boldsymbol{t}_{RA'} = \left(1+\sqrt{3}, 3\right)^\top \approx (2{,}73, 3)^\top$ a $\boldsymbol{t}_{RA''} = (0, 1)^\top$.

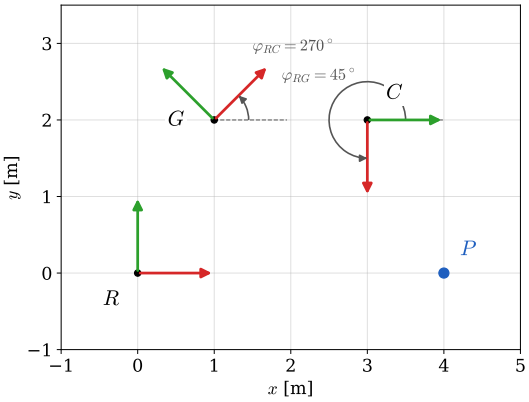
b)
A' (násobení zprava): posun o 2 proběhl podél **vlastní** osy x_A (směr 30°), počátek se posunul z $(1, 2)$ do $\left(1+\sqrt{3}, 3\right)$; rotace je kolem vlastního počátku. A'' (násobení zleva): celý systém se otočil o 90° **kolem počátku R** (počátek $(1, 2) \to (-2, 1)$) a pak posunul o 2 podél x_R do $(0, 1)$. Obecně: $T_{RA}M$ skládá pohyb v souřadnicích pohybovaného systému, MT_{RA} v souřadnicích referenčního systému.

c)
Rovinné rotace komutují, $R(30°)R(90°) = R(90°)R(30°) = R(120°)$, orientace tedy nezávisí na pořadí; liší se jen translace. V $\mathrm{SE}(3)$ rotace obecně nekomutují (viz příklad 7c), lišila by se i orientace.

6. Kamera, robot a chapadlo

Pohled shora: robot má referenční systém R, kamera C je upevněna nad stolem s $T_{RC} = (R(270°), (3, 2)^\top)$ a chapadlo G je v poloze $T_{RG} = (R(45°), (1, 2)^\top)$. Kamera detekovala objekt P, $\boldsymbol{t}_{CP} = (2, 1)^\top$.

a) Spočítejte polohu objektu v systému robota $\boldsymbol{t}_{RP}$.
b) Spočítejte T_{GC} a polohu objektu v systému chapadla $\boldsymbol{t}_{GP}$ dvěma způsoby (přes $\boldsymbol{t}_{RP}$ a přes T_{GC}).
c) Chapadlo se má posunout tak, aby jeho počátek ležel na objektu a orientace zůstala. Zapište nové $T_{RG'}$ a vektor posunu vyjádřený v R i v G.



Řešení.

a)
Zadané matice ($h = \frac{\sqrt{2}}{2}$):

$$T_{RC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{RG} = \begin{pmatrix} h & -h & 1 \\ h & h & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{RG}^{-1} = \begin{pmatrix} h & h & -3h \\ -h & h & -h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bod P převedeme z C do R:

$$\boldsymbol{t}_{RP}^H = T_{RC}\,\boldsymbol{t}_{CP}^H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)
T_{GC} převádí z C do G: z C do R maticí T_{RC} a z R do G maticí T_{RG}^{-1},

$$T_{GC} = T_{RG}^{-1}\,T_{RC} = \begin{pmatrix} h & h & -3h \\ -h & h & -h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h & h & 2h \\ -h & -h & -2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tj. $R(\varphi_{GC}) = R(-135°)$, $\boldsymbol{t}_{GC} = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)^\top$. Poloha objektu v G přes R (z a) a přímo přes T_{GC}:

$$\boldsymbol{t}_{GP}^H = T_{RG}^{-1}\,\boldsymbol{t}_{RP}^H = \begin{pmatrix} h & h & -3h \\ -h & h & -h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ -5h \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{t}_{GP}^H = T_{GC}\,\boldsymbol{t}_{CP}^H = \begin{pmatrix} -h & h & 2h \\ -h & -h & -2h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ -5h \\ 1 \end{pmatrix},$$

tj. $\boldsymbol{t}_{GP} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^\top \approx (0{,}71, -3{,}54)^\top$ v obou případech.

---

c)
Nová poloha chapadla má stejnou rotaci a počátek v bodě P:

$$T_{RG'} = \begin{pmatrix} R(45°) & \boldsymbol{t}_{RP} \\ \boldsymbol{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -h & 4 \\ h & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

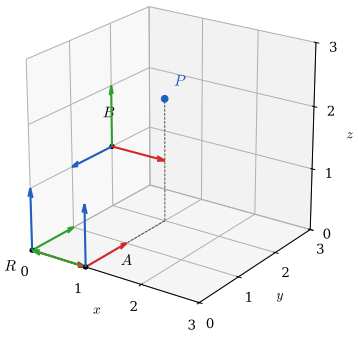
Vektor posunu v R je $\boldsymbol{t}_{RP} - \boldsymbol{t}_{RG} = (3, -2)^\top$, v G je to $\boldsymbol{t}_{GP} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^\top$ – tentýž vektor vyjádřený v jiném systému (délka $\sqrt{13}$ v obou). Ekvivalentně posun v souřadnicích chapadla násobíme zprava (příklad 5):

$$T_{RG'} = T_{RG}\,T(\boldsymbol{t}_{GP}) = \begin{pmatrix} h & -h & 1 \\ h & h & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & -5h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -h & 4 \\ h & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Transformace v SE(3)

Systém A vznikne z R otočením o 90° kolem osy z a posunem o 1 podél x_R; systém B otočením o 90° kolem osy x a posunem do bodu $(0, 2, 1)^\top$ (viz obrázek). Bod P je zadán v B: $\boldsymbol{t}_{BP} = (1, 1, 0)^\top$.

a) Zapište $R_z(90°)$, $R_x(90°)$ a matice T_{RA}, T_{RB} (4×4).
b) Spočítejte $\boldsymbol{t}_{RP}$ a $\boldsymbol{t}_{AP}$ a ověřte je z obrázku.
c) Spočítejte T_{AB} a ukažte, že $R_z(90°)R_x(90°) \neq R_x(90°)R_z(90°)$. Jak vypadají osy systému, který vznikne z R první, resp. druhou rotací?



Řešení.

a)
Rotace o 90° kolem osy z, resp. x ($\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$), a homogenní matice 4×4:

$$R_z(90°) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_x(90°) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{RA} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{RB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sloupce rotační matice jsou osy systému vyjádřené v R: $x_A = (0,1,0)^\top, y_A = (-1,0,0)^\top, z_A = z_R; x_B = (1,0,0)^\top, y_B = (0,0,1)^\top, z_B = (0,-1,0)^\top$.

---

b)

Bod P převedeme z B do R maticí T_{RB} a z R do A inverzí $T_{RA}^{-1} = \begin{pmatrix} R_z(90°)^\top & -R_z(90°)^\top \boldsymbol{t}_{RA} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$:

$$\boldsymbol{t}_{RP}^H = T_{RB}\, \boldsymbol{t}_{BP}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{t}_{AP}^H = T_{RA}^{-1}\, \boldsymbol{t}_{RP}^H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kontrola z obrázku: od počátku B jdeme o 1 podél $x_B = x_R$ a o 1 podél $y_B = z_R$; od počátku A je bod o 2 podél $x_A = y_R$ a o 2 podél z.

---

c)

$$T_{AB} = T_{RA}^{-1}\, T_{RB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tj. $R_{AB} = R_z(-90°)\, R_x(90°)$ a $\boldsymbol{t}_{AB} = (2,1,1)^\top$. Kontrola: $T_{AB}\, \boldsymbol{t}_{BP}^H = (2,0,2,1)^\top$, stejně jako v b).

Pořadí rotací:

$$R_z(90°)\, R_x(90°) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_x(90°)\, R_z(90°) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

První součin (čteno zprava: nejprve rotace kolem x_R, pak kolem z_R) dává systém s osami $x' = (0,1,0)^\top$, $y' = (0,0,1)^\top$, $z' = (1,0,0)^\top$ (sloupce matice); druhý $x' = (0,0,1)^\top$, $y' = (-1,0,0)^\top$, $z' = (0,-1,0)^\top$. Prostorové rotace nekomutují, pořadí činitelů je podstatné.