Robotika: sbírka příkladů – transformace

Příklady procvičují zápis a skládání transformací: zápis T_{XY} z obrázku, inverzi, skládání a převod souřadnic bodu mezi systémy. Na obrázcích je červeně osa x, zeleně osa y (modře z). Výpočty zapisujte v homogenních souřadnicích jako součiny matic: stačí matice sestavit a naznačit, co se čím násobí; výsledek nemusíte dopočítávat ručně.

Notace.

- Souřadnicové systémy: R je referenční systém; A, B, C, … jsou další systémy, G systém chapadla.
- $T_{XY} \in \mathrm{SE}(2)$ je homogenní matice 3×3, která převádí souřadnice ze systému Y do systému X:

$$T_{XY} = \begin{pmatrix} R(\varphi_{XY}) & \boldsymbol{t}_{XY} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

- φ_{XY} je úhel natočení systému Y vůči X.
- $\boldsymbol{t}_{XY} = (x_{XY}, y_{XY})^\top \in \mathbb{R}^2$ je **vektor z počátku X do počátku Y vyjádřený v X** (nehomogenní).
- Poloha bodu V v systému X je $\boldsymbol{t}_{XV} \in \mathbb{R}^2$, vektor z počátku X do bodu V vyjádřený v X; $\boldsymbol{t}_{XY}$ je tedy poloha počátku systému Y.
- Homogenní souřadnice značíme horním indexem H: $\boldsymbol{t}^H_{XV} = (x_{XV}, y_{XV}, 1)^\top$, takže $\boldsymbol{t}^H_{XV} = T_{XY}\, \boldsymbol{t}^H_{YV}$; nehomogenně $\boldsymbol{t}_{XV} = R(\varphi_{XY})\, \boldsymbol{t}_{YV} + \boldsymbol{t}_{XY}$.
- $R(\theta)$ je rotace o úhel θ; v součinu transformací ji chápeme jako prvek $\mathrm{SE}(2)$:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} R(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

- Posuny podél os, I je jednotková matice 2×2:

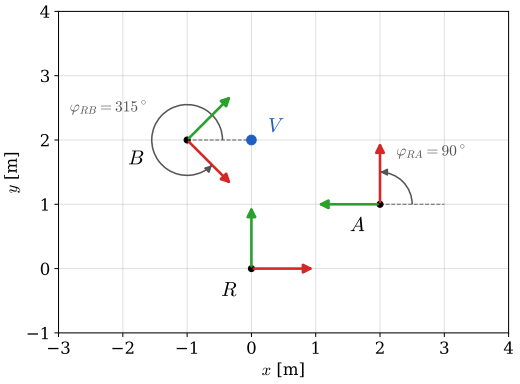
$$T_x(l) = \begin{pmatrix} I & (l,0)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}, \quad T_y(l) = \begin{pmatrix} I & (0,l)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

- V prostoru je $T_{XY} = \left(\begin{smallmatrix} R_{XY} & \boldsymbol{t}_{XY} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SE}(3)$ matice 4×4 s rotační maticí $R_{XY} \in \mathrm{SO}(3)$ a $\boldsymbol{t}_{XY} \in \mathbb{R}^3$; $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$ jsou rotace kolem souřadnicových os.
- Vektory píšeme tučně ($\boldsymbol{t}$), skaláry netučně (x_{XY}, θ), matice velkými písmeny (T, R); velkými netučnými písmeny značíme i body a souřadnicové systémy (V, P, A, B, R).

1. Dva systémy a bod – základní úloha

Na obrázku jsou souřadnicové systémy A a B. Bod V je zadán v systému A: $\boldsymbol{t}_{AV} = (1, 2)^\top$.

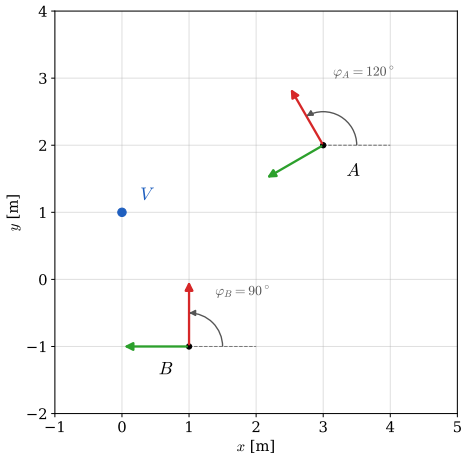
a) Zapište T_{RA} a T_{RB} (rotační matici i translaci číselně).
b) Spočítejte T_{AB} a T_{BA}. Naznačte, jak se počítá inverze, a ověřte, že $T_{AB} T_{BA} = I$.
c) Spočítejte $\boldsymbol{t}_{RV}$ a $\boldsymbol{t}_{BV}$ a zkontrolujte výsledek odečtením z obrázku.
d) Spočítejte $\boldsymbol{t}_{BV}$ také jedním krokem pomocí T_{BA} z b).



2. Dva systémy bez zakresleného referenčního systému

Na obrázku jsou souřadnicové systémy A a B. Referenční systém R zakreslen není, ale čísla na osách odpovídají jeho souřadnicím; kdo chce, může si ho zavést a postupovat jako v příkladu 1. Úhly φ_A a φ_B jsou měřeny od vodorovného směru, tj. od osy x_R. Bod V je zadán v systému B: $\boldsymbol{t}_{BV} = (2, 1)^\top$.

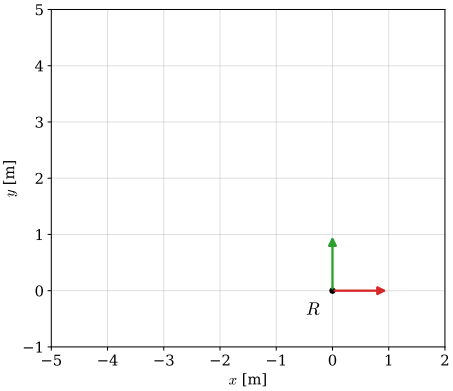
a) Odečtěte z obrázku T_{BA}.
b) Spočítejte T_{AB}. Proč je obtížnější ji vyčíst z obrázku?
c) Spočítejte $\boldsymbol{t}_{AV}$.



3. Nakreslete systémy ze zadaných transformací

Je dáno $T_{RA} = (R(90°), (-2, 1)^\top)$ a $T_{AB} = (R(-45°), (2, 1)^\top)$; v systému B leží bod V, $\boldsymbol{t}_{BV} = (1, 1)^\top$.

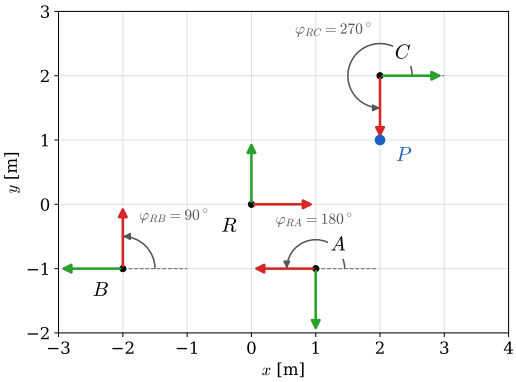
a) Nakreslete do mřížky systémy A a B a bod V (postupujte od R přes A).
b) Odečtěte z nákresu T_{RB} a ověřte výsledek výpočtem $T_{RB} = T_{RA}T_{AB}$.
c) Odečtěte z nákresu $\boldsymbol{t}_{RV}$ a ověřte výpočtem.



4. Tři systémy – skládání transformací

Na obrázku jsou systémy A, B, C a bod P zadaný v systému C: $\boldsymbol{t}_{CP} = (1, 0)^\top$.

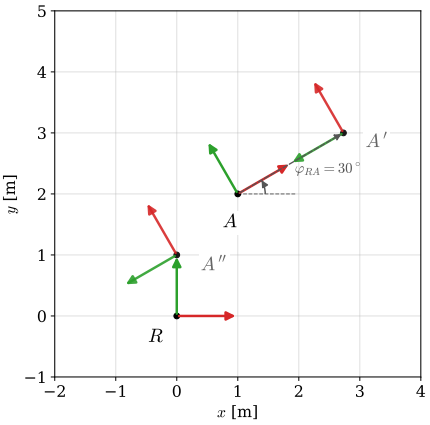
a) Zapište T_{RA}, T_{RB}, T_{RC}.
b) Spočítejte T_{AB} a T_{BC} a z nich $T_{AC} = T_{AB}T_{BC}$. Ověřte výsledek přímo z $T_{RA}^{-1}T_{RC}$.
c) Spočítejte $\boldsymbol{t}_{RP}$, $\boldsymbol{t}_{AP}$ a $\boldsymbol{t}_{BP}$.
d) V jakém pořadí se transformace násobí, chceme-li $\boldsymbol{t}_{AP}$ z $\boldsymbol{t}_{CP}$? Napište výraz v homogenních souřadnicích a slovně popište, co každý činitel dělá.



5. Pohyb systému: v jeho vlastních, nebo v referenčních souřadnicích?

Systém A má $T_{RA} = (R(30°), (1, 2)^\top)$. Provedeme s ním pohyb $M = T_x(2)\, R(90°)$, tj. otočení o 90° a posun o 2 ve směru x.

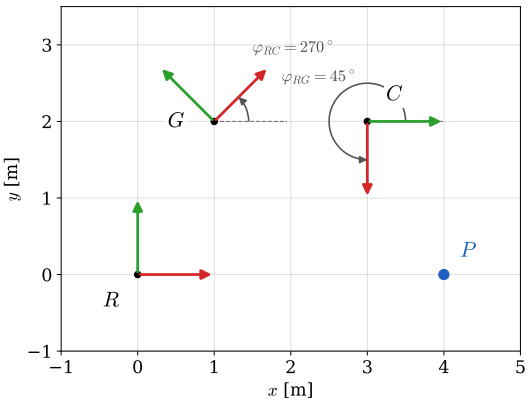
a) Spočítejte $T_{RA'} = T_{RA} M$ (pohyb zadaný v souřadnicích systému A) a $T_{RA''} = M T_{RA}$ (pohyb zadaný v souřadnicích R).
b) Nakreslete oba výsledné systémy a slovně popište, který posun a která rotace se kde provedla.
c) Proč mají oba systémy stejnou orientaci? Platilo by to i v SE(3)?



6. Kamera, robot a chapadlo

Pohled shora: robot má referenční systém R, kamera C je upevněna nad stolem s $T_{RC} = (R(270°), (3, 2)^\top)$ a chapadlo G je v poloze $T_{RG} = (R(45°), (1, 2)^\top)$. Kamera detekovala objekt P, $\boldsymbol{t}_{CP} = (2, 1)^\top$.

a) Spočítejte polohu objektu v systému robota $\boldsymbol{t}_{RP}$.
b) Spočítejte T_{GC} a polohu objektu v systému chapadla $\boldsymbol{t}_{GP}$ dvěma způsoby (přes $\boldsymbol{t}_{RP}$ a přes T_{GC}).
c) Chapadlo se má posunout tak, aby jeho počátek ležel na objektu a orientace zůstala. Zapište nové $T_{RG'}$ a vektor posunu vyjádřený v R i v G.



7. Transformace v SE(3)

Systém A vznikne z R otočením o 90° kolem osy z a posunem o 1 podél x_R; systém B otočením o 90° kolem osy x a posunem do bodu $(0, 2, 1)^\top$ (viz obrázek). Bod P je zadán v B: $\boldsymbol{t}_{BP} = (1, 1, 0)^\top$.

a) Zapište $R_z(90°)$, $R_x(90°)$ a matice T_{RA}, T_{RB} (4×4).
b) Spočítejte $\boldsymbol{t}_{RP}$ a $\boldsymbol{t}_{AP}$ a ověřte je z obrázku.
c) Spočítejte T_{AB} a ukažte, že $R_z(90°) R_x(90°) \neq R_x(90°) R_z(90°)$. Jak vypadají osy systému, který vznikne z R první, resp. druhou rotací?

