Robotika: sbírka příkladů – otevřené kinematické řetězce – ŘEŠENÍ

Příklady pokrývají přímou kinematiku rovinných sériových manipulátorů (zápis součinem transformací a goniometrickými funkcemi), jakobián a geometrické řešení inverzní kinematiky. U každého manipulátoru postupujte stejně: a) součin transformací, b) goniometrický zápis, c) jakobián, d) inverzní kinematika s náčrtem konstrukce. Předpokládejte, že máte k dispozici funkce pro výpočet průsečíku dvou kružnic a průsečíku kružnice s přímkou.

Notace.

- Souřadnicové systémy: R je referenční systém, G systém chapadla; A, B, C, … jsou klouby (body) řetězce v pořadí od základny a souřadnicový systém kloubu má stejné jméno jako kloub.
- $T_{XY} \in \mathrm{SE}(2)$ je homogenní matice 3×3, která převádí souřadnice ze systému Y do systému X:

$$T_{XY} = \begin{pmatrix} R(\varphi_{XY}) & \boldsymbol{t}_{XY} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

- φ_{XY} je úhel natočení systému Y vůči X.
- $\boldsymbol{t}_{XY} = (x_{XY}, y_{XY})^\top \in \mathbb{R}^2$ je **vektor z počátku X do počátku Y vyjádřený v X** (nehomogenní).
- Homogenní souřadnice značíme horním indexem H: $\boldsymbol{t}^H_{XY} = (x_{XY}, y_{XY}, 1)^\top \in \mathbb{R}^3$, takže $\boldsymbol{p}^H_X = T_{XY}\boldsymbol{p}^H_Y$.
- $R(\theta)$ je rotace o úhel θ; v součinu transformací ji chápeme jako prvek $\mathrm{SE}(2)$:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} R(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

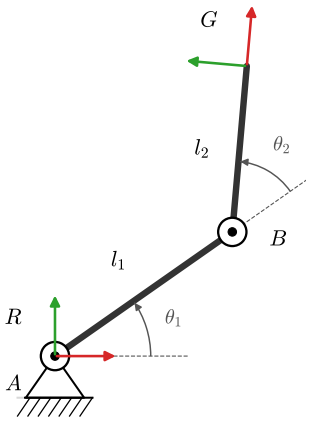
- Posuny podél os, I je jednotková matice 2×2:

$$T_x(l) = \begin{pmatrix} I & (l,0)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}, \quad T_y(l) = \begin{pmatrix} I & (0,l)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

- Vektory píšeme tučně ($\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{q}$), skaláry netučně (x_{RG}, θ_1, l_1), matice velkými písmeny (T, R, J); velkými netučnými písmeny značíme i body a souřadnicové systémy (A, B, G).
- $k(\boldsymbol{c}, r)$ značí kružnici se středem $\boldsymbol{c}$ a poloměrem r, $p(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ přímku procházející body $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$; $k_1 \cap k_2$, resp. $k_1 \cap p_1$, je množina jejich průsečíků (0, 1 nebo 2 body).
- Prostor úkolů je buď poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG} \in \mathbb{R}^2$, nebo poloha a orientace $T_{RG} \in \mathrm{SE}(2)$, kterou zapisujeme trojicí $(x_{RG}, y_{RG}, \varphi_{RG})$.

1. Manipulátor RR – polohová úloha

Rovinný manipulátor má dva rotační klouby: A v počátku systému R s natočením θ_1 měřeným od osy x_R a B s natočením θ_2 měřeným od směru ramene 1. Ramena mají délky l_1, l_2; systém G leží na konci ramene 2 a jeho osa x míří ve směru ramene. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top$. Prostor úkolů je poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG} \in \mathbb{R}^2$.



a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Zapište přímou kinematiku goniometrickými funkcemi: $x_{RG} = \ldots$, $y_{RG} = \ldots$.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika: pro zadané $\boldsymbol{t}_{RG}$ najděte geometricky všechna $\boldsymbol{q}$, určete počet řešení a načrtněte konstrukci.

Řešení.

a)

$$T_{RG} = R(\theta_1)\,T_x(l_1)\,R(\theta_2)\,T_x(l_2), \quad R(\cdot), T_x(\cdot) \in \mathrm{SE}(2).$$

Poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG}$ je translační část T_{RG}, tj. první dva prvky jejího posledního sloupce.

---

b)

$$\begin{aligned} x_{RG} &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ y_{RG} &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

---

c)

Derivováním b) podle (θ_1, θ_2):

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}.$$

---

d)

Kloub B leží na kružnici kolem A o poloměru l_1 a na kružnici kolem G o poloměru l_2:

$$k_1(\boldsymbol{t}_{RA}, l_1), \quad k_2(\boldsymbol{t}_{RG}, l_2), \quad \boldsymbol{t}_{RA} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{t}_{RB} \in k_1 \cap k_2.$$

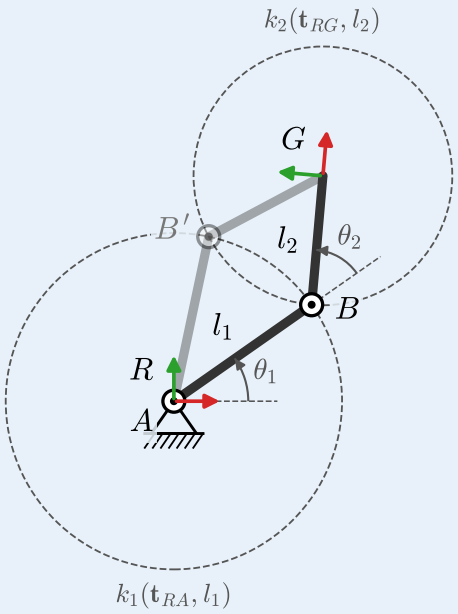
Počet řešení:

- 2 řešení, pokud $|l_1 - l_2| < \|\boldsymbol{t}_{RG}\| < l_1 + l_2$ (kloub B po jedné nebo druhé straně spojnice AG),
- 1 řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{RG}\| = l_1 + l_2$ nebo $\|\boldsymbol{t}_{RG}\| = |l_1 - l_2| > 0$ (kružnice se dotýkají),
- nekonečně mnoho řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{RG}\| = 0$ a $l_1 = l_2$ (kružnice splývají),
- 0 řešení jinak.

Pro každý průsečík $\boldsymbol{t}_{RB}$ (systém B má počátek v kloubu B a osu x ve směru ramene 1, takže $\boldsymbol{t}_{BG} = l_2(\cos\theta_2, \sin\theta_2)^\top$):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \operatorname{atan2}(y_{RB}, x_{RB}) + 2k\pi, \\ \boldsymbol{t}^H_{BG} &= T_{RB}^{-1}\,\boldsymbol{t}^H_{RG}, \quad T_{RB} = R(\theta_1)\,T_x(l_1), \\ \theta_2 &= \operatorname{atan2}(y_{BG}, x_{BG}) + 2k\pi, \end{aligned}$$

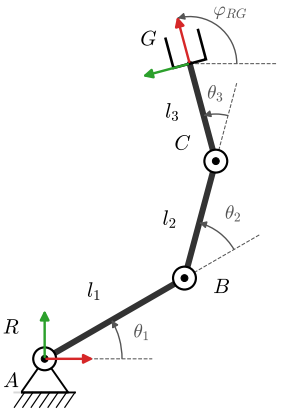
kde $k \in \mathbb{Z}$ je pro každý úhel libovolné.



2. Manipulátor RRR – poloha a orientace

Manipulátor má tři rotační klouby A (v počátku R), B, C a ramena l_1, l_2, l_3; každé natočení θ_i se měří od směru předchozího ramene (u A od osy x_R). Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^\top$. Prostor úkolů je SE(2): poloha a orientace chapadla $(x_{RG}, y_{RG}, \varphi_{RG})$.

a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}, φ_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika pro zadané $(x_{RG}, y_{RG}, \varphi_{RG})$: geometricky, počet řešení, náčrt.



Řešení.

a)

$$T_{RG} = R(\theta_1)\, T_x(l_1)\, R(\theta_2)\, T_x(l_2)\, R(\theta_3)\, T_x(l_3), \quad R(\cdot), T_x(\cdot) \in \mathrm{SE}(2).$$

Poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG}$ je translační část T_{RG}, tj. první dva prvky jejího posledního sloupce; orientace φ_{RG} je úhel rotační části $R(\varphi_{RG})$, tj. $\varphi_{RG} = \operatorname{atan2}\big((T_{RG})_{21}, (T_{RG})_{11}\big)$.

---

b)

$$\begin{aligned} x_{RG} &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \\ y_{RG} &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \\ \varphi_{RG} &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3. \end{aligned}$$

---

c)

Derivováním b) podle $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$:

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) - l_3 \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) - l_3 \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -l_3 \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) + l_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) + l_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & l_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

d)

Z orientace známe směr posledního ramene, poloha kloubu C je tedy

$$\boldsymbol{t}_{RC} = \boldsymbol{t}_{RG} - l_3(\cos\varphi_{RG}, \sin\varphi_{RG})^\top.$$

Totéž pomocí transformace: v systému G má kloub C souřadnice $(-l_3, 0)^\top$ a $T_{RG} = (R(\varphi_{RG}), \boldsymbol{t}_{RG})$ známe ze zadání, takže

$$\boldsymbol{t}^H_{RC} = T_{RG}\,(-l_3, 0, 1)^\top.$$

Dál jako u RR (příklad 1) s C místo G:

$$k_1(\boldsymbol{t}_{RA}, l_1), \quad k_2(\boldsymbol{t}_{RC}, l_2), \quad \boldsymbol{t}_{RB} \in k_1 \cap k_2.$$

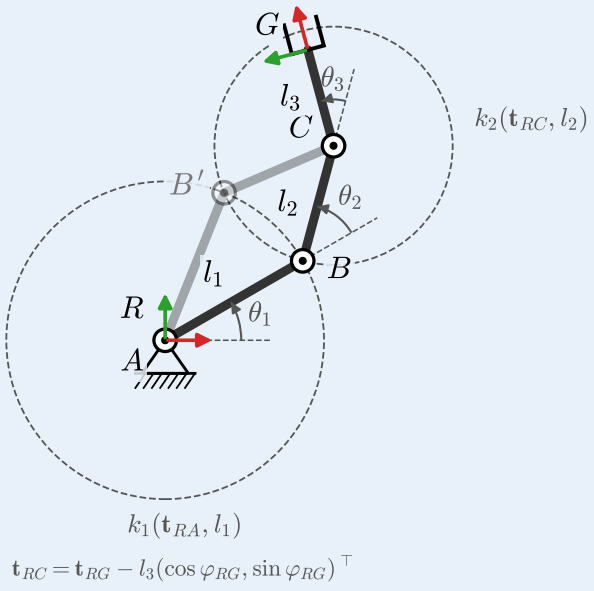
Počet řešení:

- 2 řešení, pokud $|l_1 - l_2| < \|\boldsymbol{t}_{RC}\| < l_1 + l_2$ (kloub B po jedné nebo druhé straně spojnice AC),
- 1 řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{RC}\| = l_1 + l_2$ nebo $\|\boldsymbol{t}_{RC}\| = |l_1 - l_2| > 0$ (kružnice se dotýkají),
- nekonečně mnoho řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{RC}\| = 0$ a $l_1 = l_2$ (kružnice splývají),
- 0 řešení jinak.

Orientace počet řešení nemění, θ_3 je pro každou dvojici θ_1, θ_2 jediné. Pro každý průsečík:

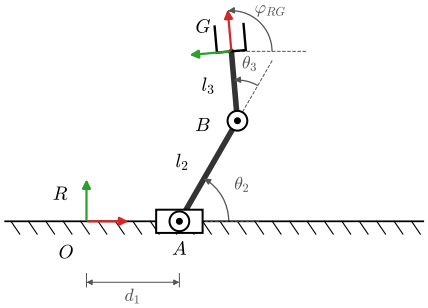
$$\begin{aligned} \theta_1 &= \operatorname{atan2}(y_{RB}, x_{RB}) + 2k\pi, \\ \boldsymbol{t}^H_{BC} &= T^{-1}_{RB}\,\boldsymbol{t}^H_{RC}, \quad T_{RB} = R(\theta_1)\,T_x(l_1), \\ \theta_2 &= \operatorname{atan2}(y_{BC}, x_{BC}) + 2k\pi, \\ \theta_3 &= \varphi_{RG} - \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi, \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ je pro každý úhel libovolné.



3. Manipulátor PRR – posuvný kloub v základně

Jezdec A se posouvá po vedení v ose x_R, jeho poloha d_1 je první kloubová souřadnice. Na jezdci je rotační kloub s natočením θ_2 měřeným od osy x_R, rameno l_2, rotační kloub B s natočením θ_3 od směru ramene 2 a rameno l_3 s chapadlem G. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (d_1, \theta_2, \theta_3)^\top$. Prostor úkolů je $\mathrm{SE}(2)$.



a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}, φ_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika pro zadané $(x_{RG}, y_{RG}, \varphi_{RG})$ geometricky; počet řešení; náčrt.

Řešení.

a)

$$T_{RG} = T_x(d_1)\, R(\theta_2)\, T_x(l_2)\, R(\theta_3)\, T_x(l_3), \quad R(\cdot), T_x(\cdot) \in \mathrm{SE}(2).$$

Poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG}$ je translační část T_{RG}, tj. první dva prvky jejího posledního sloupce; orientace φ_{RG} je úhel rotační části $R(\varphi_{RG})$, tj. $\varphi_{RG} = \mathrm{atan2}\big((T_{RG})_{21}, (T_{RG})_{11}\big)$.

---

b)

$$\begin{aligned} x_{RG} &= d_1 + l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3), \\ y_{RG} &= l_2 \sin\theta_2 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3), \\ \varphi_{RG} &= \theta_2 + \theta_3. \end{aligned}$$

---

c)

Derivováním b) podle $(d_1, \theta_2, \theta_3)$:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \sin\theta_2 - l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) & -l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ 0 & l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) & l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

d)

Z orientace

$$\boldsymbol{t}_{RB} = \boldsymbol{t}_{RG} - l_3(\cos\varphi_{RG}, \sin\varphi_{RG})^\top, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{t}^H_{RB} = T_{RG}\,(-l_3, 0, 1)^\top.$$

Jezdec A leží na ose posuvu (přímka $y = 0$, procházející body $\mathbf{0}$ a $(1,0)^\top$) a ve vzdálenosti l_2 od B:

$$p_1(\mathbf{0}, (1,0)^\top), \quad k_1(\boldsymbol{t}_{RB}, l_2), \quad \boldsymbol{t}_{RA} \in p_1 \cap k_1,$$

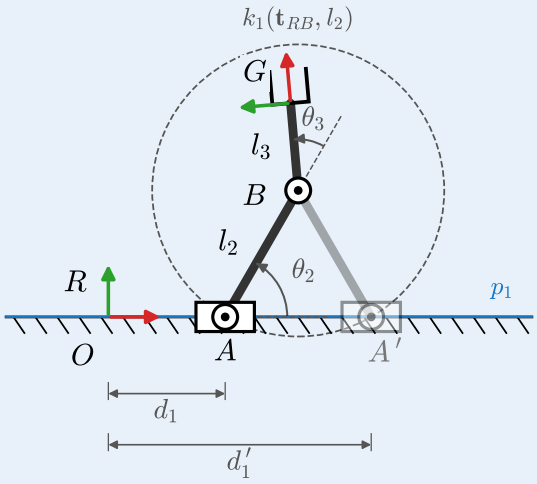
tj. $\boldsymbol{t}_{RA} = (d_1, 0)^\top$. Počet řešení:

- 2 řešení, pokud $|y_{RB}| < l_2$ (jezdec vlevo/vpravo od B),
- 1 řešení, pokud $|y_{RB}| = l_2$ (přímka p_1 je tečnou kružnice k_1),
- 0 řešení jinak.

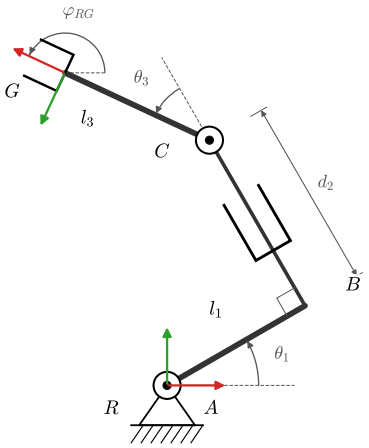
Pro každý průsečík:

$$\begin{aligned} d_1 &= x_{RB} \pm \sqrt{l_2^2 - y_{RB}^2}, \\ \boldsymbol{t}^H_{AB} &= T_{RA}^{-1}\, \boldsymbol{t}^H_{RB}, \quad T_{RA} = T_x(d_1), \\ \theta_2 &= \mathrm{atan2}(y_{AB}, x_{AB}) + 2k\pi, \\ \theta_3 &= \varphi_{RG} - \theta_2 + 2k\pi, \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ je pro každý úhel libovolné.



4. Manipulátor RPR s posuvem kolmým na rameno



Rameno l_1 je otočné v kloubu A (počátek R, natočení θ_1 od osy x_R). V jeho koncovém bodě B je **pevně** připojeno vedení kolmé na rameno (otočené o $+90°$), po kterém se posouvá jezdec; jeho posun d_2 se měří od B a může být i záporný. Na jezdci je rotační kloub C s natočením θ_3 měřeným od směru vedení a rameno l_3 s chapadlem G. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, d_2, \theta_3)^\top$. Prostor úkolů je $\mathrm{SE}(2)$.

a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}, φ_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika geometricky; počet řešení; náčrt konstrukce.

Řešení.

a)

$$T_{RG} = R(\theta_1)\, T_x(l_1)\, R(90°)\, T_x(d_2)\, R(\theta_3)\, T_x(l_3), \quad R(\cdot), T_x(\cdot) \in \mathrm{SE}(2).$$

Poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG}$ je translační část T_{RG}, tj. první dva prvky jejího posledního sloupce; orientace φ_{RG} je úhel rotační části $R(\varphi_{RG})$, tj. $\varphi_{RG} = \mathrm{atan2}\big((T_{RG})_{21}, (T_{RG})_{11}\big)$.

---

b)

$$\begin{aligned} x_{RG} &= l_1 \cos\theta_1 - d_2 \sin\theta_1 - l_3 \sin(\theta_1 + \theta_3), \\ y_{RG} &= l_1 \sin\theta_1 + d_2 \cos\theta_1 + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_3), \\ \varphi_{RG} &= \theta_1 + \theta_3 + 90°. \end{aligned}$$

(Vedení míří ve směru $\theta_1 + 90°$, tj. $(-\sin\theta_1, \cos\theta_1)^\top$, rameno l_3 ve směru φ_{RG}; $\cos(\gamma + 90°) = -\sin\gamma$, $\sin(\gamma + 90°) = \cos\gamma$.)

---

c)

Derivováním b) podle $(\theta_1, d_2, \theta_3)$:

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - d_2 \cos\theta_1 - l_3 \cos(\theta_1+\theta_3) & -\sin\theta_1 & -l_3\cos(\theta_1+\theta_3) \\ l_1\cos\theta_1 - d_2\sin\theta_1 - l_3\sin(\theta_1+\theta_3) & \cos\theta_1 & -l_3\sin(\theta_1+\theta_3) \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d)
Z orientace

$$\boldsymbol{t}_{RC} = \boldsymbol{t}_{RG} - l_3(\cos\varphi_{RG}, \sin\varphi_{RG})^\top, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{t}^H_{RC} = T_{RG}\,(-l_3, 0, 1)^\top.$$

Bod B leží na kružnici kolem A o poloměru l_1 a trojúhelník ABC má v B pravý úhel (vedení je kolmé na rameno), takže B leží i na Thaletově kružnici nad úsečkou AC:

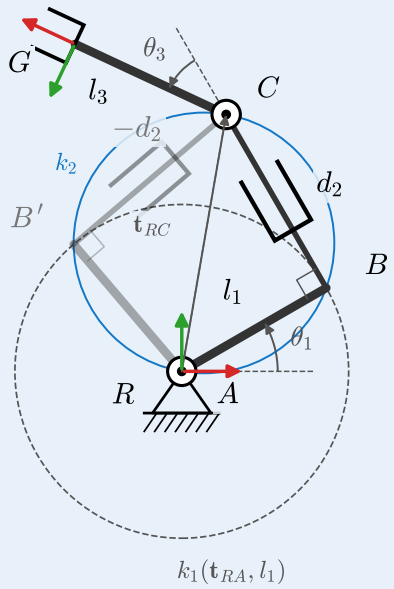
$$k_1(\boldsymbol{t}_{RA}, l_1), \quad k_2(\boldsymbol{t}_{RC}/2, \|\boldsymbol{t}_{RC}\|/2), \quad \boldsymbol{t}_{RB} \in k_1 \cap k_2.$$

(Ekvivalentně: vedení je tečna kružnice k_1 procházející bodem C a B je bod dotyku.) Počet řešení:
- 2 řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{RC}\| > l_1$ ($d_2 > 0$ a $d_2 < 0$, zrcadlová podle AC),
- 1 řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{RC}\| = l_1$ ($d_2 = 0$, $B = C$),
- 0 řešení jinak.

Pro každý průsečík (systém B má počátek v B a osu x ve směru vedení, takže $\boldsymbol{t}_{BC} = (d_2, 0)^\top$):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \operatorname{atan2}(y_{RB}, x_{RB}) + 2k\pi, \\ \boldsymbol{t}^H_{BC} &= T^{-1}_{RB}\,\boldsymbol{t}^H_{RC}, \quad T_{RB} = R(\theta_1)\,T_x(l_1)\,R(90°), \\ d_2 &= x_{BC}, \\ \theta_3 &= \varphi_{RG} - \theta_1 - 90° + 2k\pi, \end{aligned}$$

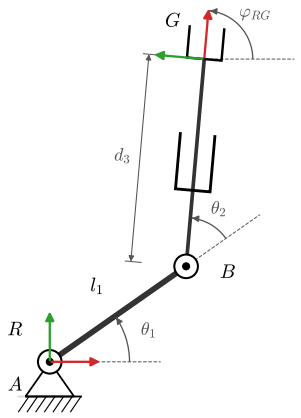
kde $k \in \mathbb{Z}$ je pro každý úhel libovolné. (Z pravoúhlého trojúhelníku ABC též $\|\boldsymbol{t}_{RC}\|^2 = l_1^2 + d_2^2$, tj. $d_2 = \pm\sqrt{\|\boldsymbol{t}_{RC}\|^2 - l_1^2}$.)



5. Manipulátor RRP – teleskopické rameno

Rameno l_1 je otočné v kloubu A (počátek R, natočení θ_1 od osy x_R). V kloubu B (natočení θ_2 od směru ramene 1) je uchyceno teleskopické rameno: po jeho ose se vysouvá tyč s chapadlem G, vysunutí d_3 se měří od B. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2, d_3)^\top$. Prostor úkolů je $\mathrm{SE}(2)$.

a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}, φ_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika geometricky; počet řešení; náčrt konstrukce.



Řešení.

a)

$$T_{RG} = R(\theta_1)\, T_x(l_1)\, R(\theta_2)\, T_x(d_3), \quad R(\cdot), T_x(\cdot) \in \mathrm{SE}(2).$$

Poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG}$ je translační část T_{RG}, tj. první dva prvky jejího posledního sloupce; orientace φ_{RG} je úhel rotační části $R(\varphi_{RG})$, tj. $\varphi_{RG} = \mathrm{atan2}\big((T_{RG})_{21}, (T_{RG})_{11}\big)$.

---

b)

$$\begin{aligned} x_{RG} &= l_1 \cos\theta_1 + d_3 \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ y_{RG} &= l_1 \sin\theta_1 + d_3 \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ \varphi_{RG} &= \theta_1 + \theta_2. \end{aligned}$$

---

c)

Derivováním b) podle $(\theta_1, \theta_2, d_3)$:

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - d_3 \sin(\theta_1+\theta_2) & -d_3 \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + d_3 \cos(\theta_1+\theta_2) & d_3 \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

d)

Osa tyče prochází bodem G ve směru $(\cos\varphi_{RG}, \sin\varphi_{RG})^\top$, je tedy známá, a kloub B na ní leží ve vzdálenosti l_1 od A:

$$p_1\big(\boldsymbol{t}_{RG}, \boldsymbol{t}_{RG} + (\cos\varphi_{RG}, \sin\varphi_{RG})^\top\big), \quad k_1(\boldsymbol{t}_{RA}, l_1), \quad \boldsymbol{t}_{RB} \in p_1 \cap k_1.$$

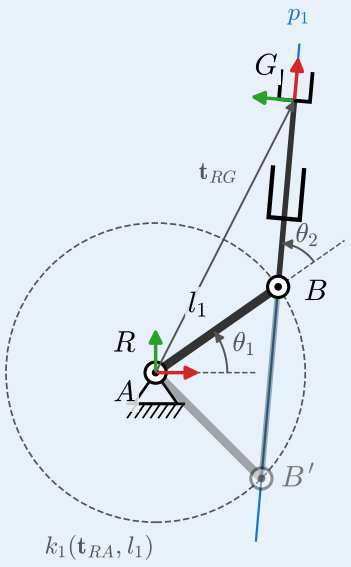
Počet řešení podle vzdálenosti $\delta = |x_{RG}\sin\varphi_{RG} - y_{RG}\cos\varphi_{RG}|$ přímky p_1 od A:

- 2 řešení, pokud $\delta < l_1$,
- 1 řešení, pokud $\delta = l_1$ (přímka p_1 je tečnou kružnice k_1),
- 0 řešení jinak.

Pro každý průsečík (systém B má počátek v B a osu x ve směru tyče, takže $\boldsymbol{t}_{BG} = (d_3, 0)^\top$):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \mathrm{atan2}(y_{RB}, x_{RB}) + 2k\pi, \\ \theta_2 &= \varphi_{RG} - \theta_1 + 2k\pi, \\ \boldsymbol{t}^H_{BG} &= T_{RB}^{-1}\, \boldsymbol{t}^H_{RG}, \quad T_{RB} = R(\theta_1)\, T_x(l_1)\, R(\theta_2), \\ d_3 &= x_{BG}, \end{aligned}$$

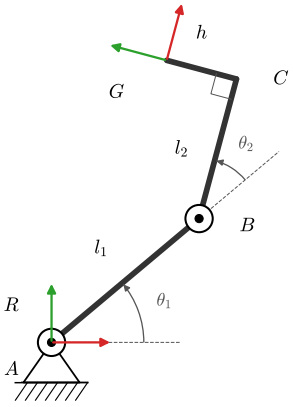
kde $k \in \mathbb{Z}$ je pro každý úhel libovolné.



6. Manipulátor RR s odsazeným chapadlem

Manipulátor RR jako v příkladu 1, ale rameno 2 má tvar písmene L: za kloubem B pokračuje o délku l_2 do bodu C a pak kolmo (otočení o $+90°$) o délku h do chapadla G. Osa x_G míří ve směru úseku BC. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top$. Prostor úkolů je poloha $\boldsymbol{t}_{RG} \in \mathbb{R}^2$.

a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika geometricky; počet řešení; náčrt konstrukce.



Řešení.

a)

$$T_{RG} = R(\theta_1)\, T_x(l_1)\, R(\theta_2)\, T_x(l_2)\, T_y(h), \quad R(\cdot), T_x(\cdot), T_y(\cdot) \in \mathrm{SE}(2).$$

Poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG}$ je translační část T_{RG}, tj. první dva prvky jejího posledního sloupce.

---

b)

$$\begin{aligned} x_{RG} &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - h \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ y_{RG} &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + h \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

---

c)

Derivováním b) podle (θ_1, θ_2):

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - h \cos(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - h \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - h \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - h \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}.$$

---

d)
Vzdálenost B od G je pevná, $\|\boldsymbol{t}_{RG} - \boldsymbol{t}_{RB}\| = l_{2'} = \sqrt{l_2^2 + h^2}$:

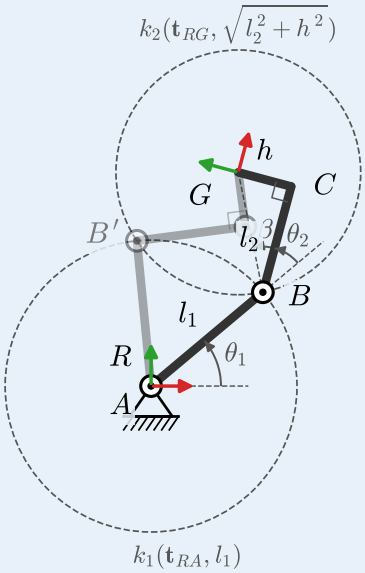
$$k_1(\boldsymbol{t}_{RA}, l_1), \quad k_2(\boldsymbol{t}_{RG}, l_{2'}), \quad \boldsymbol{t}_{RB} \in k_1 \cap k_2.$$

Počet řešení:
- 2 řešení, pokud $|l_1 - l_{2'}| < \|\boldsymbol{t}_{RG}\| < l_1 + l_{2'}$ (kloub B po jedné nebo druhé straně spojnice AG),
- 1 řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{RG}\| = l_1 + l_{2'}$ nebo $\|\boldsymbol{t}_{RG}\| = |l_1 - l_{2'}| > 0$ (kružnice se dotýkají),
- nekonečně mnoho řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{RG}\| = 0$ a $l_1 = l_{2'}$ (kružnice splývají),
- 0 řešení jinak.

V systému B (počátek v B, osa x ve směru ramene 1) je $\boldsymbol{t}_{BG} = l_{2'}(\cos(\theta_2 + \beta), \sin(\theta_2 + \beta))^\top$, kde $\beta = \operatorname{atan2}(h, l_2)$ je úhel mezi úsekem BC a spojnicí BG, proto

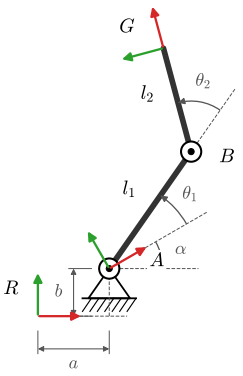
$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \operatorname{atan2}(y_{RB}, x_{RB}) + 2k\pi, \\
\boldsymbol{t}^H_{BG} &= T_{RB}^{-1}\, \boldsymbol{t}^H_{RG}, \quad T_{RB} = R(\theta_1)\, T_x(l_1), \\
\theta_2 &= \operatorname{atan2}(y_{BG}, x_{BG}) - \beta + 2k\pi,
\end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ je pro každý úhel libovolné.



7. Manipulátor RR na posunuté a natočené základně

Kloub A manipulátoru RR (ramena l_1, l_2) není v počátku R: leží v bodě $\boldsymbol{t}_{RA} = (a, b)^\top$ a základna je natočená o pevný úhel α, tj. $T_{RA} = T_x(a)T_y(b)R(\alpha)$. Natočení θ_1 se měří od osy x_A, θ_2 od směru ramene 1. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top$. Prostor úkolů je poloha $\boldsymbol{t}_{RG} \in \mathbb{R}^2$.



a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika: převeďte zadání do systému A a použijte příklad 1. Zapište explicitně, které vektory a transformace použijete.

Řešení.

a)

$$T_{RG} = T_x(a)\,T_y(b)\,R(\alpha)\,R(\theta_1)\,T_x(l_1)\,R(\theta_2)\,T_x(l_2), \quad R(\cdot), T_x(\cdot), T_y(\cdot) \in \mathrm{SE}(2).$$

Poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG}$ je translační část T_{RG}, tj. první dva prvky jejího posledního sloupce.

---

b)

S $\gamma_1 = \alpha + \theta_1$, $\gamma_2 = \alpha + \theta_1 + \theta_2$:

$$\begin{aligned} x_{RG} &= a + l_1 \cos\gamma_1 + l_2 \cos\gamma_2, \\ y_{RG} &= b + l_1 \sin\gamma_1 + l_2 \sin\gamma_2. \end{aligned}$$

---

c)

Derivováním b) podle (θ_1, θ_2); γ_1 závisí jen na θ_1, γ_2 na obou:

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\gamma_1 - l_2 \sin\gamma_2 & -l_2 \sin\gamma_2 \\ l_1 \cos\gamma_1 + l_2 \cos\gamma_2 & l_2 \cos\gamma_2 \end{pmatrix}.$$

---

d)

Polohu chapadla vyjádříme v systému A:

$$\boldsymbol{t}_{AG} = R(\alpha)^\top(\boldsymbol{t}_{RG} - \boldsymbol{t}_{RA}) = R(-\alpha)(\boldsymbol{t}_{RG} - (a,b)^\top),$$

tj. translační část $T_{AG} = T_{RA}^{-1} T_{RG}$ (v homogenních souřadnicích $\boldsymbol{t}^H_{AG} = T_{RA}^{-1}\boldsymbol{t}^H_{RG}$). Pak řešíme úlohu RR z příkladu 1 v systému A, kde má kloub A souřadnice $\mathbf{0}$:

$$k_1(\mathbf{0}, l_1), \quad k_2(\boldsymbol{t}_{AG}, l_2), \quad \boldsymbol{t}_{AB} \in k_1 \cap k_2.$$

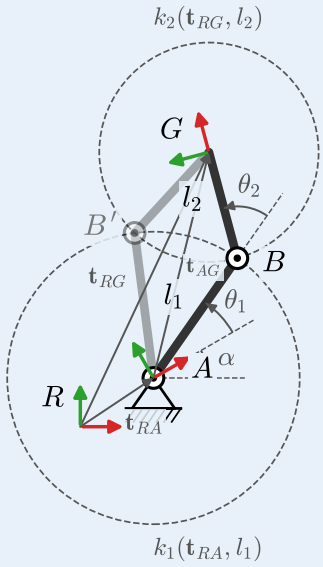
Počet řešení:

- 2 řešení, pokud $|l_1 - l_2| < \|\boldsymbol{t}_{AG}\| < l_1 + l_2$ (kloub B po jedné nebo druhé straně spojnice AG),
- 1 řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{AG}\| = l_1 + l_2$ nebo $\|\boldsymbol{t}_{AG}\| = |l_1 - l_2| > 0$ (kružnice se dotýkají),
- nekonečně mnoho řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{AG}\| = 0$ a $l_1 = l_2$ (kružnice splývají),
- 0 řešení jinak.

Pro každý průsečík:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \operatorname{atan2}(y_{AB}, x_{AB}) + 2k\pi, \\ \boldsymbol{t}^H_{BG} &= T_{AB}^{-1}\,\boldsymbol{t}^H_{AG}, \quad T_{AB} = R(\theta_1)\,T_x(l_1), \\ \theta_2 &= \operatorname{atan2}(y_{BG}, x_{BG}) + 2k\pi, \end{aligned}$$

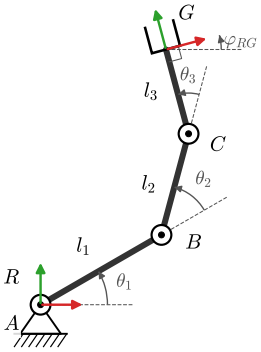
kde $k \in \mathbb{Z}$ je pro každý úhel libovolné. Úhly θ_1, θ_2 jsou kloubové souřadnice a na volbě systému nezávisí; v R jsou to tytéž kružnice $k_1(\boldsymbol{t}_{RA}, l_1)$ a $k_2(\boldsymbol{t}_{RG}, l_2)$, jen úhel ramene 1 vůči x_R je $\alpha + \theta_1$.



8. Manipulátor RRR s otočeným chapadlem

Manipulátor RRR z příkladu 2 (klouby A, B, C, ramena l_1, l_2, l_3), ale systém chapadla G je vůči rameni 3 **pevně otočen o −90°**: osa x_G je kolmá na rameno 3 a osa y_G míří ve směru ramene. Chapadlo samo zůstává souosé s ramenem 3, otočený je jen jeho souřadnicový systém. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^\top$. Prostor úkolů je $\mathrm{SE}(2)$.

a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}, φ_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika pro zadané $(x_{RG}, y_{RG}, \varphi_{RG})$ geometricky; počet řešení; náčrt. V čem se liší od příkladu 2?



Řešení.

a)

$$T_{RG} = R(\theta_1)\, T_x(l_1)\, R(\theta_2)\, T_x(l_2)\, R(\theta_3)\, T_x(l_3)\, R(-90°), \quad R(\cdot), T_x(\cdot) \in \mathrm{SE}(2).$$

Poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG}$ je translační část T_{RG}, tj. první dva prvky jejího posledního sloupce; orientace φ_{RG} je úhel rotační části $R(\varphi_{RG})$, tj. $\varphi_{RG} = \mathrm{atan2}\big((T_{RG})_{21}, (T_{RG})_{11}\big)$.

---

b)

$$\begin{aligned} x_{RG} &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \\ y_{RG} &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \\ \varphi_{RG} &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 90°. \end{aligned}$$

Pevná rotace $R(-90°)$ na konci řetězce polohu nemění (následuje za posledním posunem), jen odečítá 90° od orientace.

---

c)

Derivováním b) podle $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ vyjde tentýž jakobián jako v příkladu 2 (konstanta $-90°$ derivací zmizí):

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) - l_3 \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) - l_3 \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -l_3 \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) + l_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) + l_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & l_3 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d)

Rameno 3 míří ve směru $\varphi_{RG} + 90°$, nikoli φ_{RG}; poloha kloubu C je tedy

$$\boldsymbol{t}_{RC} = \boldsymbol{t}_{RG} - l_3(\cos(\varphi_{RG}+90°), \sin(\varphi_{RG}+90°))^\top = \boldsymbol{t}_{RG} + l_3(\sin\varphi_{RG}, -\cos\varphi_{RG})^\top.$$

Pomocí transformace: v systému G leží kloub C na záporné ose y_G, $\boldsymbol{t}^H_{RC} = T_{RG}\,(0, -l_3, 1)^\top$. Dál stejně jako v příkladu 2:

$$k_1(\boldsymbol{t}_{RA}, l_1), \quad k_2(\boldsymbol{t}_{RC}, l_2), \quad \boldsymbol{t}_{RB} \in k_1 \cap k_2.$$

Počet řešení:

- 2 řešení, pokud $|l_1 - l_2| < \|\boldsymbol{t}_{RC}\| < l_1 + l_2$ (kloub B po jedné nebo druhé straně spojnice AC),
- 1 řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{RC}\| = l_1 + l_2$ nebo $\|\boldsymbol{t}_{RC}\| = |l_1 - l_2| > 0$ (kružnice se dotýkají),
- nekonečně mnoho řešení, pokud $\|\boldsymbol{t}_{RC}\| = 0$ a $l_1 = l_2$ (kružnice splývají),
- 0 řešení jinak.

Pro každý průsečík:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \operatorname{atan2}(y_{RB}, x_{RB}) + 2k\pi, \\ \boldsymbol{t}^H_{BC} &= T_{RB}^{-1}\,\boldsymbol{t}^H_{RC}, \quad T_{RB} = R(\theta_1)\,T_x(l_1), \\ \theta_2 &= \operatorname{atan2}(y_{BC}, x_{BC}) + 2k\pi, \\ \theta_3 &= \varphi_{RG} + 90° - \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi, \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ je pro každý úhel libovolné. Oproti příkladu 2 se liší jen směr, kterým od G odečítáme rameno 3, a člen $+90°$ u θ_3; pro tutéž polohu G a tutéž orientaci chapadla dostaneme jinou konfiguraci než robot bez otočení.

