Robotika: sbírka příkladů – otevřené kinematické řetězce

Příklady pokrývají přímou kinematiku rovinných sériových manipulátorů (zápis součinem transformací a goniometrickými funkcemi), jakobián a geometrické řešení inverzní kinematiky. U každého manipulátoru postupujte stejně: a) součin transformací, b) goniometrický zápis, c) jakobián, d) inverzní kinematika s náčrtem konstrukce. Předpokládejte, že máte k dispozici funkce pro výpočet průsečíku dvou kružnic a průsečíku kružnice s přímkou.

Notace.

- Souřadnicové systémy: R je referenční systém, G systém chapadla; A, B, C, … jsou klouby (body) řetězce v pořadí od základny a souřadnicový systém kloubu má stejné jméno jako kloub.
- $T_{XY} \in \mathrm{SE}(2)$ je homogenní matice 3×3, která převádí souřadnice ze systému Y do systému X:

$$T_{XY} = \begin{pmatrix} R(\varphi_{XY}) & \boldsymbol{t}_{XY} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

- φ_{XY} je úhel natočení systému Y vůči X.
- $\boldsymbol{t}_{XY} = (x_{XY}, y_{XY})^\top \in \mathbb{R}^2$ je **vektor z počátku X do počátku Y vyjádřený v X** (nehomogenní).
- Homogenní souřadnice značíme horním indexem H: $\boldsymbol{t}^H_{XY} = (x_{XY}, y_{XY}, 1)^\top \in \mathbb{R}^3$, takže $\boldsymbol{p}^H_X = T_{XY}\boldsymbol{p}^H_Y$.
- $R(\theta)$ je rotace o úhel θ; v součinu transformací ji chápeme jako prvek $\mathrm{SE}(2)$:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} R(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

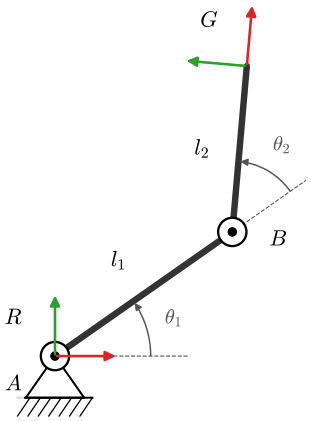
- Posuny podél os, I je jednotková matice 2×2:

$$T_x(l) = \begin{pmatrix} I & (l,0)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}, \quad T_y(l) = \begin{pmatrix} I & (0,l)^\top \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

- Vektory píšeme tučně ($\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{q}$), skaláry netučně (x_{RG}, θ_1, l_1), matice velkými písmeny (T, R, J); velkými netučnými písmeny značíme i body a souřadnicové systémy (A, B, G).
- $k(\boldsymbol{c}, r)$ značí kružnici se středem $\boldsymbol{c}$ a poloměrem r, $p(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ přímku procházející body $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$; $k_1 \cap k_2$, resp. $k_1 \cap p_1$, je množina jejich průsečíků (0, 1 nebo 2 body).
- Prostor úkolů je buď poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG} \in \mathbb{R}^2$, nebo poloha a orientace $T_{RG} \in \mathrm{SE}(2)$, kterou zapisujeme trojicí $(x_{RG}, y_{RG}, \varphi_{RG})$.

1. Manipulátor RR – polohová úloha

Rovinný manipulátor má dva rotační klouby: A v počátku systému R s natočením θ_1 měřeným od osy x_R a B s natočením θ_2 měřeným od směru ramene 1. Ramena mají délky l_1, l_2; systém G leží na konci ramene 2 a jeho osa x míří ve směru ramene. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top$. Prostor úkolů je poloha chapadla $\boldsymbol{t}_{RG} \in \mathbb{R}^2$.

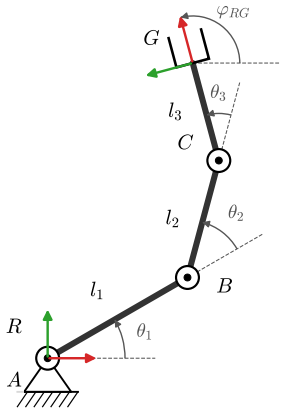


a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Zapište přímou kinematiku goniometrickými funkcemi: $x_{RG} = \ldots$, $y_{RG} = \ldots$.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika: pro zadané $\boldsymbol{t}_{RG}$ najděte geometricky všechna $\boldsymbol{q}$, určete počet řešení a načrtněte konstrukci.

2. Manipulátor RRR – poloha a orientace

Manipulátor má tři rotační klouby A (v počátku R), B, C a ramena l_1, l_2, l_3; každé natočení θ_i se měří od směru předchozího ramene (u A od osy x_R). Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^\top$. Prostor úkolů je SE(2): poloha a orientace chapadla $(x_{RG}, y_{RG}, \varphi_{RG})$.

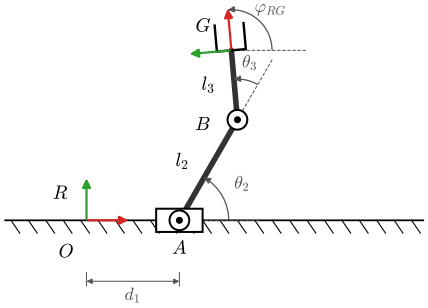
a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}, φ_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika pro zadané $(x_{RG}, y_{RG}, \varphi_{RG})$: geometricky, počet řešení, náčrt.



3. Manipulátor PRR – posuvný kloub v základně

Jezdec A se posouvá po vedení v ose x_R, jeho poloha d_1 je první kloubová souřadnice. Na jezdci je rotační kloub s natočením θ_2 měřeným od osy x_R, rameno l_2, rotační kloub B s natočením θ_3 od směru ramene 2 a rameno l_3 s chapadlem G. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (d_1, \theta_2, \theta_3)^\top$. Prostor úkolů je SE(2).

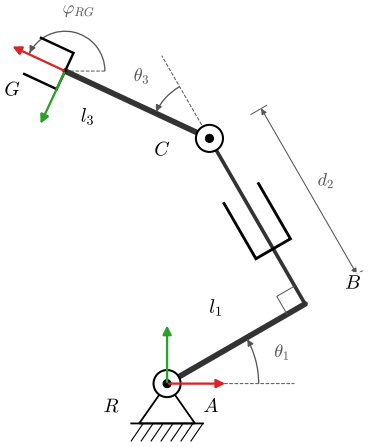
a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}, φ_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika pro zadané $(x_{RG}, y_{RG}, \varphi_{RG})$ geometricky; počet řešení; náčrt.



4. Manipulátor RPR s posuvem kolmým na rameno

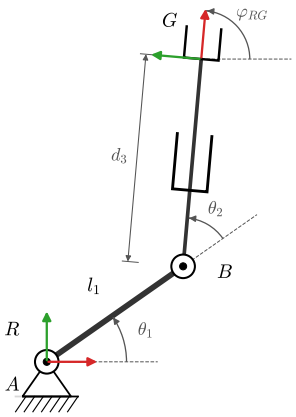
Rameno l_1 je otočné v kloubu A (počátek R, natočení θ_1 od osy x_R). V jeho koncovém bodě B je **pevně** připojeno vedení kolmé na rameno (otočené o $+90°$), po kterém se posouvá jezdec; jeho posun d_2 se měří od B a může být i záporný. Na jezdci je rotační kloub C s natočením θ_3 měřeným od směru vedení a rameno l_3 s chapadlem G. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, d_2, \theta_3)^\top$. Prostor úkolů je SE(2).

a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}, φ_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika geometricky; počet řešení; náčrt konstrukce.



5. Manipulátor RRP – teleskopické rameno

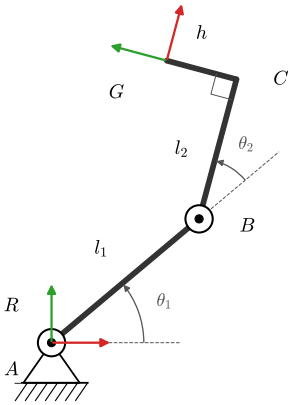
Rameno l_1 je otočné v kloubu A (počátek R, natočení θ_1 od osy x_R). V kloubu B (natočení θ_2 od směru ramene 1) je uchyceno teleskopické rameno: po jeho ose se vysouvá tyč s chapadlem G, vysunutí d_3 se měří od B. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2, d_3)^\top$. Prostor úkolů je $\mathrm{SE}(2)$.



a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}, φ_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika geometricky; počet řešení; náčrt konstrukce.

6. Manipulátor RR s odsazeným chapadlem

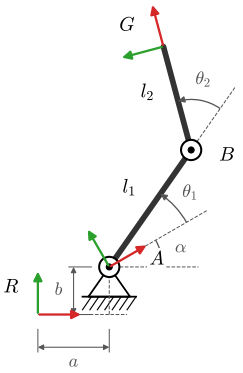
Manipulátor RR jako v příkladu 1, ale rameno 2 má tvar písmene L: za kloubem B pokračuje o délku l_2 do bodu C a pak kolmo (otočení o $+90°$) o délku h do chapadla G. Osa x_G míří ve směru úseku BC. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top$. Prostor úkolů je poloha $\boldsymbol{t}_{RG} \in \mathbb{R}^2$.



a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika geometricky; počet řešení; náčrt konstrukce.

7. Manipulátor RR na posunuté a natočené základně

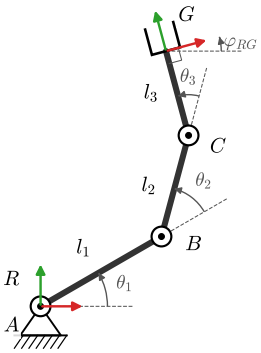
Kloub A manipulátoru RR (ramena l_1, l_2) není v počátku R: leží v bodě $\boldsymbol{t}_{RA} = (a, b)^\top$ a základna je natočená o pevný úhel α, tj. $T_{RA} = T_x(a)T_y(b)R(\alpha)$. Natočení θ_1 se měří od osy x_A, θ_2 od směru ramene 1. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2)^\top$. Prostor úkolů je poloha $\boldsymbol{t}_{RG} \in \mathbb{R}^2$.



a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika: převeďte zadání do systému A a použijte příklad 1. Zapište explicitně, které vektory a transformace použijete.

8. Manipulátor RRR s otočeným chapadlem

Manipulátor RRR z příkladu 2 (klouby A, B, C, ramena l_1, l_2, l_3), ale systém chapadla G je vůči rameni 3 **pevně otočen o −90°**: osa x_G je kolmá na rameno 3 a osa y_G míří ve směru ramene. Chapadlo samo zůstává souosé s ramenem 3, otočený je jen jeho souřadnicový systém. Konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^\top$. Prostor úkolů je $\mathrm{SE}(2)$.



a) Zapište přímou kinematiku jako součin elementárních transformací ve tvaru $T_{RG} = \ldots$.
b) Goniometrický zápis x_{RG}, y_{RG}, φ_{RG}.
c) Spočítejte jakobián J.
d) Inverzní kinematika pro zadané $(x_{RG}, y_{RG}, \varphi_{RG})$ geometricky; počet řešení; náčrt. V čem se liší od příkladu 2?